Glava 7

LAPLASOVA TRANSFORMACIJA

Predstavom signala u frekvencijskom domenu korišćenjem Furijove transformacije znatno se olakšava analiza i obrada kontinualnih signala. Međutim, područje primjene Furijeove transformacije je ograničeno na signale koji zadovoljavaju uslove za njenu egzistenciju. Osim toga, da bismo Furijeovu transformaciju koristili za obradu signala neophodno je poznavanje signala i impulsnog odziva sistema u svakom trenutku vremena, jer su granice definicionih integrala konvolucije i Furijeove transformacije $-\infty$ i ∞. Furijeova transformacija se ne može direktno koristiti za traženje odziva koji uključuju prelazne procese u slučajevima kad je poznato samo početno stanje sistema, impulsni odziv i eksitacija od trenutka posmatranja. Međutim, nakon dovoljno dugo vremena, kada se završe prelazni procesi, postaje nevažno kakav je oblik signala bio prije početka posmatranja, te je Furijeova transformacija pogodan alat za analizu i obradu signala u ustaljenom stanju. Zbog navedenih nedostataka ukazala se potreba za uvođenjem Laplasove transformacije (Pierre-Simon Laplace, 1749-1827), koja proširuje klasu signala za koju transformacija konvergira. Uvođenje unilateralne Laplasove transformacije znatno olakšava određivanje odziva LTI sistema, jer omogućava direktno određivanje kompletnog odziva, uključujući i prelazni proces i ustaljeno stanje.

7.1 Bilateralna Laplasova transformacija

Pretpostavimo da množenjem signala $x(t)$ eksponencijalnom funkcijom oblika $e^{-\sigma_0 t}$, $\sigma_0 \in \mathbb{R}$ možemo osigurati konvergenciju Furijeovog integrala i u slučajevima kada signal $x(t)$ nije apsolutno integrabilan i kada nije moguće pronaći njegovu Furijeovu transformaciju. Tada egzistira Furijeova transformacija pomoćnog signala:

$$v(t) = x(t)e^{-\sigma_0 t}, \tag{7.1}$$

koji jeste apsolutno integrabilan:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |v(t)| dt = \int_{-\infty}^{\infty} \left| x(t)e^{-\sigma_0 t} \right| dt = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)| e^{-\sigma_0 t} dt < \infty . \tag{7.2}$$

Označimo Furijeovu transformaciju signala $v(t)$ sa:

$$V(\Omega) = \mathscr{F}\{v(t)\}. \tag{7.3}$$

Tada je:

$$V(\Omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \left[x(t)e^{-\sigma_0 t} \right] e^{-j\Omega t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-\sigma_0 t} e^{-j\Omega t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-(\sigma_0 + j\Omega)t} dt . \tag{7.4}$$

Kompleksna varijabla:

$$s_0 = \sigma_0 + j\Omega, \tag{7.5}$$

koja se pojavljuje u Furijeovom integralu pomoćne funkcije $v(t)$, ima prirodu kompleksne učestanosti. Realni dio kompleksne učestanosti $\sigma_0 = \mathrm{Re}\{s\}$ može da poprimi bilo koju vrijednost koja osigurava apsolutnu integrabilnost pomoćnog signala $v(t)$. Zbog toga je opravdano konstantu σ_0 zamijeniti promjenljivom σ.

Uvođenjem promjenljive:

$$s = \sigma + j\Omega \tag{7.6}$$

u (7.4), dobijamo novu funkciju kompleksne učestanosti s :

$$X(s)=\int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-st}dt\,, \tag{7.7}$$

koja se naziva *Laplasova transformacija* (*Laplace Transform – LT*) signala $x(t)$.

U upotrebi je sljedeći način označavanja Laplasove transformacije:

$$X(s)=\mathscr{L}\{x(t)\}. \tag{7.8}$$

Vrijedi da je:

$$\mathscr{L}\{x(t)\}=\mathscr{F}\{v(t)\}=\mathscr{F}\{x(t)e^{-\sigma t}\}, \tag{7.9}$$

odnosno:

$$X(s)=V(\Omega),\ s=\sigma+j\Omega\,, \tag{7.10}$$

u oblasti konvergencije Laplasove transformacije.

U izrazu za Laplasovu transformaciju (7.7) se gubi informacija o pomoćnom signalu $v(t)$. Laplasova transformacija je funkcija kompleksne učestanosti s. Pri tome moramo voditi računa o skupu vrijednosti σ za koje je osigurana konvergencija integrala (7.7). Dio kompleksne s ravni za koji vrijedi da $\sigma=\mathrm{Re}\{s\}$ osigurava apsolutnu integrabilnost pomoćnog signala $v(t)$ i egzistenciju njegove Furijeove transformacije, a time i egzistenciju Laplasove transformacije signala $x(t)$, se naziva *oblast konvergencije* Laplasove transformacije.

Inverzna Furijeova transformacija pomoćnog signala $v(t)$ je data sa:

$$v(t)=x(t)e^{-\sigma t}=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} V(\Omega)e^{j\Omega t}d\Omega\,. \tag{7.11}$$

Iz ovoga je moguće doći do izraza za inverznu Laplasovu transformaciju. Pomnožimo prethodnu jednakost sa $e^{\sigma t}$:

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} V(\Omega) e^{(\sigma + j\Omega)t} d\Omega, \tag{7.12}$$

pa uvedimo smjenu $s = \sigma + j\Omega$, vodeći računa da je u oblasti konvergencije $V(\Omega) = X(s)$. Tako dolazimo do izraza za *inverznu Laplasovu transformaciju*:

$$x(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{\sigma - j\infty}^{\sigma + j\infty} X(s) e^{st} ds, \tag{7.13}$$

pri čemu se integracija vrši po linijskom segmentu $\sigma - j\infty$ do $\sigma + j\infty$ koji se nalazi u oblasti konvergencije Laplasove transformacije.

Za inverznu Laplasovu transformaciju koristimo oznaku:

$$x(t) = \mathscr{L}^{-1}\{X(s)\}. \tag{7.14}$$

Dakle, *Laplasov transformacioni par* je dat sa:

$$X(s) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-st} dt, \tag{7.15}$$

$$x(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{\sigma - j\infty}^{\sigma + j\infty} X(s) e^{st} ds. \tag{7.16}$$

Laplasov transformacioni par često označavamo sa:

$$x(t) \leftrightarrow X(s). \tag{7.17}$$

Budući da su kod direktne transformacije granice integrala od $-\infty$ do ∞, ovako definisanu Laplasovu transformaciju nazivamo *bilateralna Laplasova transformacija*, za razliku od unilateralne Laplasove transformacije, koju ćemo uvesti nešto kasnije i koja je definisana integralom čije su granice od 0_- do ∞.

Laplasova transformacija egzistira ako vrijedi da je:

$$|X(s)| = \left| \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-st} dt \right| < \infty. \tag{7.18}$$

Kako je apsolutna vrijednost zbira manja ili jednaka zbiru apsolutnih vrijednosti, i $\left|e^{-st}\right| = \left|e^{-\sigma t}\right| > 0$ (jer je $\left|e^{-j\Omega t}\right| = 1$), integral Laplasove transformacije apsolutno konvergira ako je:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left|x(t)\right| e^{-\sigma t} dt < \infty . \tag{7.19}$$

Dovoljan uslov za to je da je signal $x(t)$ ograničen, odnosno da postoji pozitivan broj M takav da za neke konstante $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ vrijedi:

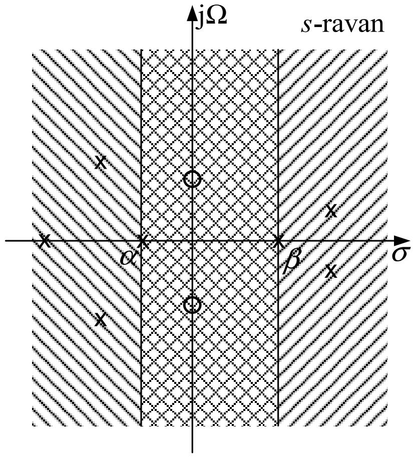
$$\left|x(t)\right| \le \begin{cases} Me^{\alpha t}, & t > 0 \\ Me^{\beta t}, & t < 0 \end{cases}, \; M > 0 . \tag{7.20}$$

Tada zbog ograničenosti signala možemo pisati:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \left|x(t)\right| e^{-\sigma t} dt &\le \int_{-\infty}^{0} Me^{(\beta-\sigma)t} dt + \int_{0}^{\infty} Me^{(\alpha-\sigma)t} dt = \\ &= M\left[\frac{1}{\beta-\sigma} e^{(\beta-\sigma)t} \Big|_{-\infty}^{0} + \frac{1}{\alpha-\sigma} e^{(\alpha-\sigma)t} \Big|_{0}^{\infty} \right]. \end{aligned} \tag{7.21}$$

Prvi integral konvergira ako je $\sigma < \beta$, jer je tada za $t < 0$ eksponent negativan i $e^{(\beta-\sigma)t}$ teži ka nuli kada $t \to -\infty$. Slično, za $t > 0$ drugi integral konvergira za $\sigma > \alpha$. Prema tome, oblast konvergencije Laplasove transformacije u opštem slučaju je trakasta oblast u s ravni $\alpha < \mathrm{Re}\{s\} < \beta$, kao na Slici 7.1. Van oblasti konvergencije Laplasova transformacija $X(s)$ može poprimiti beskonačno veliku vrijednost. Vrijednosti kompleksne učestanosti s za koje je Laplasova transformacija beskonačno velika nazivaju se *polovima*, dok se vrijednosti kompleksne učestanosti s za koje je Laplasova transformacija jednaka nuli nazivaju *nulama* $X(s)$. Uobičajeno je da se polovi grafički prikazuju sa znakom "$\times$", dok se nule označavaju sa kružićem "$\circ$".

Laplasov transformacioni par $x(t) \leftrightarrow X(s)$ nije jedinstveno određen. Pretpostavimo da je $x_1(t) \leftrightarrow X_1(s)$ i $x_2(t) \leftrightarrow X_2(s)$. Ako je $x_1(t) = x_2(t)$ iz jednoznačnosti integrala kojim je definisana Laplasova transformacija, slijedi da



Slika 7.1 Oblast konvergencije Laplasove transformacije.

je $X_1(s)=X_2(s)$. S druge strane, vrijednosti Laplasovog integrala za signale koji se razlikuju samo u konačnom broju diskretnih tačaka su jednake, jer na njegovu vrijednost ne utiče konačan broj vrijednosti signala u izolovanim tačkama.

To znači da iz $X_1(s)=X_2(s)$ ne slijedi jednakost $x_1(t)=x_2(t)$. Ipak, za fizički ostvarljive signale koji nemaju izolovane singularitete, Laplasov transformacioni par je jedinstveno određen. Prilikom određivanja inverzne Laplasove transformacije, zbog kontinualnosti kompleksne eksponencijalne funkcije e^{st}, vrijedi da je:

$$\begin{aligned} x(t_{0-})+x(t_{0+}) &= \frac{1}{2\pi j}\int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty} X(s)e^{-st_{0-}}ds+\frac{1}{2\pi j}\int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty} X(s)e^{-st_{0+}}ds= \\ &=2\frac{1}{2\pi j}\int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty} X(s)e^{-st_0}ds=2x(t_0), \end{aligned} \tag{7.22}$$

tako da se u svakoj tački vremena t_0, pa i u tačkama diskontinuiteta, rekonstruiše vrijednost koja je jednaka:

$$\frac{1}{2}\left[x(t_{0-})+x(t_{0+})\right]. \tag{7.23}$$

7.2 Unilateralna Laplasova transformacija

Kada o signalu $x(t)$ nemamo dovoljno informacija prije nekog trenutka kada počinje njegovo posmatranje, korisno je definisati jednostranu, odnosno *unilateralnu Laplasovu transformaciju*:

$$\mathscr{L}_+\{x(t)\} = X_+(s) = \int_{0_-}^{\infty} x(t) e^{-st} dt \,. \tag{7.24}$$

Oblast konvergencije ovako definisane Laplasove transformacije je uvijek desni dio kompleksne s ravni određen sa $\operatorname{Re}\{s\} > \alpha,\ \alpha \in \mathbb{R}$, dok se svi polovi funkcije $X_+(s)$ nalaze lijevo od oblasti konvergencije.

Bilateralna Laplasova transformacija kauzalnog signala $x_+(t)$, koji je za $t<0$ jednak nuli, a za $t \geq 0$ posmatranom signalu $x(t)$:

$$x_+(t) = \begin{cases} x(t), & t \geq 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases}, \tag{7.25}$$

jednaka je unilateralnoj Laplasovoj transformaciji signala $x(t)$:

$$\mathscr{L}\{x_+(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} x_+(t) e^{-st} dt = \int_{0_-}^{\infty} x(t) e^{-st} dt = \mathscr{L}_+\{x(t)\} = X_+(s) \,. \tag{7.26}$$

Zbog toga se računanje *inverzne unilateralne Laplasove transformacije* od $X_+(s)$ svodi na računanje inverzne bilateralne Laplasove transformacije i zadržavanje samo dijela signala za $t \geq 0$:

$$x_+(t) = \mathscr{L}^{-1}\{X_+(s)\},\ t \geq 0 \,, \tag{7.27}$$

odnosno:

$$x_+(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{\sigma - j\infty}^{\sigma + j\infty} X_+(s) e^{st} ds,\ t \geq 0 \,. \tag{7.28}$$

Iz konteksta je uvijek poznato da li se koristi bilateralna ili unilateralna Laplasova transformacija. Stoga nije uobičajeno, niti ima potrebe za uvođenjem različitih oznaka kako bismo napravili razliku između bilateralne i unilateralne Laplasove transformacije, te ćemo i mi u daljem izlaganju izostavljati indeks "+", i u oba slučaja koristiti oznake uvedene kod bilateralne Laplasove transformacije.

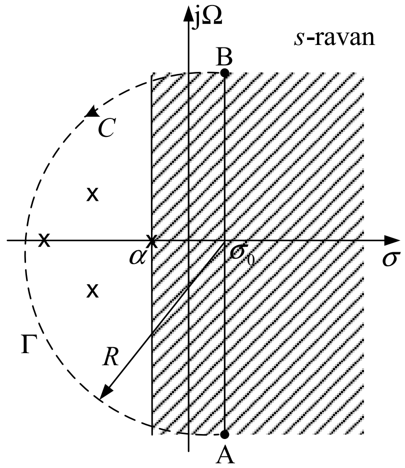
Prilikom primjene Laplasove transformacije za traženje odziva sistema, nije moguće koristiti bilateralnu Laplasovu transformaciju jer ne poznajemo niti pobudu niti stanje sistema (osim početnih uslova) prije početnog trenutka posmatranja, te se koristi unilateralna Laplasova transformacija. U literaturi se unilateralna Laplasova transformacija definiše na različite načine, koristeći za donju granicu integrala 0, 0_- ili 0_+. Bilo koja od navedenih definicija je dobra, ako se korektno koristi. Međutim, od navedenih unilateralnih Laplasovih transformacija najjednostavnije je koristiti definicioni izraz sa granicom 0_-, jer su na taj način direktno uključeni i početni uslovi koji se obično zadaju u trenutku 0_-, i nije ih potrebno određivati u trenutku 0 ili 0_+ drugim metodama.

7.3 Inverzna Laplasova transformacija

Inverznu Laplasovu transformaciju datu integralom (7.13) možemo napisati preko konturnog integrala na sljedeći način. Posmatrajmo integral po zatvorenoj konturi C u kompleksnoj s ravni orijentisanoj suprotno kretanju kazaljke na satu i prikazanoj na Slici 7.2. Ovaj integral se može iskazati kao suma integrala po pravolinijskom segmentu AB i polukružnom dijelu konture Γ:

$$\frac{1}{2\pi j}\oint_C X(s)e^{st}ds = \frac{1}{2\pi j}\left[\int_{\sigma_0 - jR}^{\sigma_0 + jR} X(s)e^{st}ds + \int_\Gamma X(s)e^{st}ds\right]. \tag{7.29}$$

Poluprečnik polukružnog dijela je R, a koordinate tačaka A i B su $\sigma_0 \pm jR$, pri čemu pravolinijski segment AB pripada oblasti konvergencije Laplasove transformacije.



Slika 7.2 Kontura integracije pri određivanju inverzne Laplasove transformacije za $t > 0$.

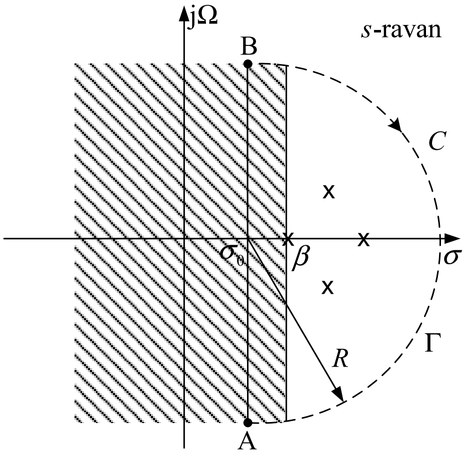
Za $t > 0$, kada poluprečnik $R \to \infty$, integral po polukružnom dijelu Γ teži ka nuli, a integral po pravolinijskom segmentu postaje jednak inverznoj Laplasovoj transformaciji, te je inverzna Laplasova transformacija za $t > 0$ data sa:

$$x(t) = \frac{1}{2\pi j} \oint_C X(s) e^{st} ds, \; t > 0 . \tag{7.30}$$

Kako bismo odredili vrijednost inverzne Laplasove transformacije za $t < 0$, konturu integracije biramo u smjeru kretanja kazaljke na satu, kao na Slici 7.3 i na sličan način zaključujemo da je:

$$x(t) = \frac{1}{2\pi j} \oint_C X(s) e^{st} ds, \; t < 0 . \tag{7.31}$$

Kada radimo sa unilateralnom Laplasovom transformacijom dovoljno je računati samo (7.30).



Slika 7.3 Kontura integracije pri određivanju inverzne Laplasove transformacije za $t < 0$.

7.4 Laplasove transformacije elementarnih signala

Poznavanje Laplasovih transformacija elementarnih signala uz poznavanje osobina Laplasove transformacije olakšava njenu primjenu. Za početak odredimo Laplasove transformacije signala nastalih kombinovanjem eksponencijalne i Hevisajdove funkcije. Laplasova transformacija kauzalnog signala:

$$x(t) = e^{\alpha t}u(t),\ \alpha \in \mathbb{C}, \tag{7.32}$$

koji je za slučaj da je α realno i $\alpha < 0$, prikazan na Slici 7.4(a), je:

$$\begin{aligned} X(s) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{\alpha t}u(t)e^{-st}dt = \int_{0}^{\infty} e^{\alpha t}e^{-st}dt = \int_{0}^{\infty} e^{-(s-\alpha)t}dt = -\left.\frac{e^{-(s-\alpha)t}}{s-\alpha}\right|_{0}^{\infty} \\ &= \frac{1}{s-\alpha},\ \sigma > \mathrm{Re}(\alpha). \end{aligned} \tag{7.33}$$

Evidentno je da je konvergencija obezbijeđena za $\sigma > \mathrm{Re}(\alpha)$, te je oblast konvergencije Laplasove transformacije ovog signala desni dio kompleksne s ravni ograničen pravom $\sigma = \mathrm{Re}(\alpha)$ koja je paralelna sa imaginarnom osom. Oblast konvergencije za slučaj da je α realno i $\alpha < 0$ je prikazana na Slici 7.4(b).

Laplasova transformacija antikauzalnog signala:

$$x(t) = e^{\beta t}u(-t),\ \beta \in \mathbb{C}, \tag{7.34}$$

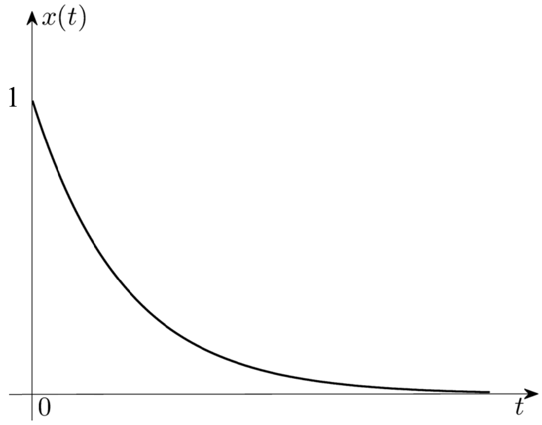
koji je za slučaj da je β realno i $\beta > 0$ prikazan na Slici 7.5(a) je:

$$\begin{aligned} X(s) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{\beta t}u(-t)e^{-st}dt = \int_{-\infty}^{0} e^{\beta t}e^{-st}dt = \int_{-\infty}^{0} e^{-(s-\beta)t}dt = -\left.\frac{e^{-(s-\beta)t}}{s-\beta}\right|_{0}^{\infty} \\ &= \frac{-1}{s-\beta},\ \sigma < \mathrm{Re}(\beta). \end{aligned} \tag{7.35}$$

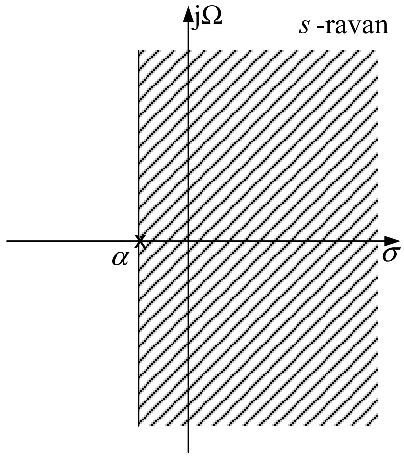
Oblast konvergencije Laplasove transformacije ovog signala prikazana na Slici 7.5(b) je, za slučaj da je β realno i $\beta > 0$, lijevi dio kompleksne s ravni u kome je $\sigma < \mathrm{Re}(\beta)$.

Slično, Laplasova transformacija signala $-e^{\alpha t}u(-t)$ je $\frac{1}{s-\alpha}$, $\sigma < \mathrm{Re}(\alpha)$. Ranije smo pronašli da je Laplasova transformacija signala $e^{\alpha t}u(t)$ jednaka $\frac{1}{s-\alpha}$, $\sigma > \mathrm{Re}(\alpha)$. Primjetimo da su analitički izrazi Laplasovih transformacija signala $e^{\alpha t}u(t)$ i $-e^{\alpha t}u(-t)$ jednaki, ali se razlikuju njihove oblasti konvergencije. Dakle, kako bismo očuvali jednoznačnost preslikavanja neophodno je voditi računa ne samo o analitičkom izrazu, već i o oblasti konvergencije Laplasove transformacije, jer ona određuje položaj konture po kojoj se integrali pri određivanju inverzne Laplasove transformacije.

(a)



(b)



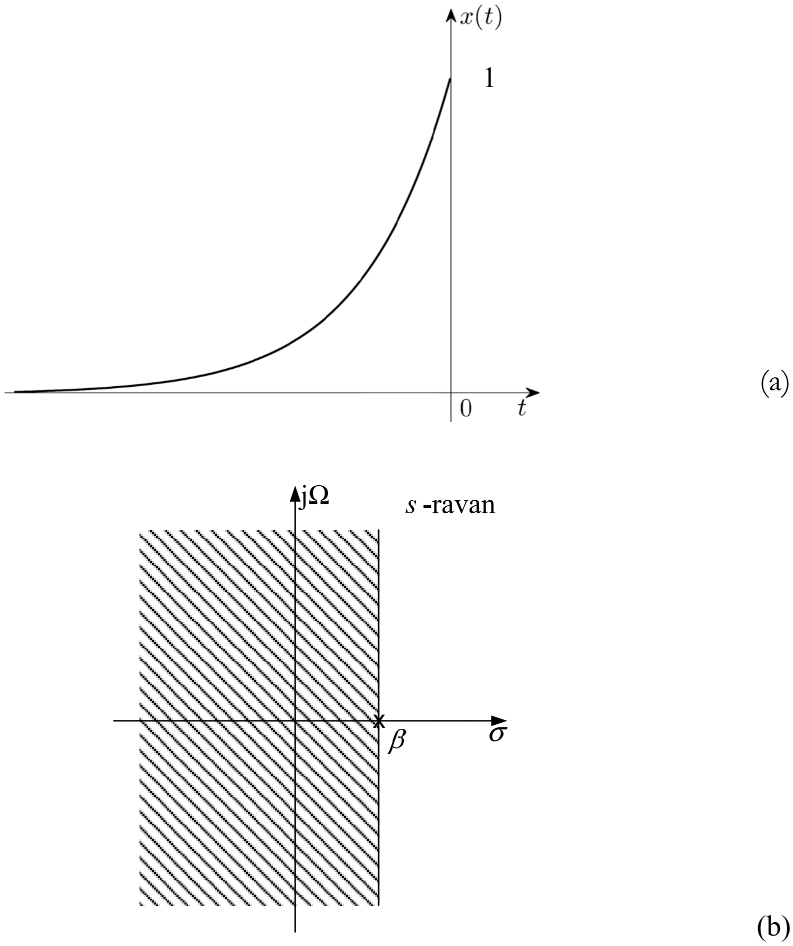
Slika 7.4 (a) Kauzalni signal i (b) oblast konvergencije njegove Laplasove transformacije.

Laplasova transformacija signala:

$$x(t) = e^{\beta t}u(-t) + e^{\alpha t}u(t),\ \alpha, \beta \in \mathbb{C} \tag{7.36}$$

koji je za slučaj da su α i β realni, te $\alpha < 0$ i $\beta > 0$, prikazan na Slici 7.6(a) je:

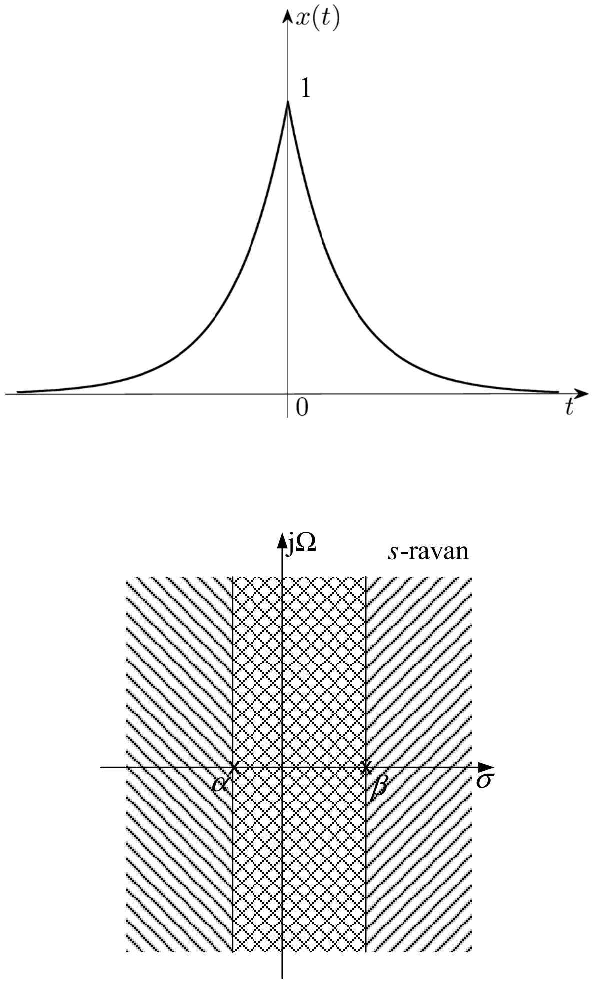
$$X(s) = \int_{-\infty}^{\infty} \left[e^{\beta t}u(-t) + e^{\alpha t}u(t) \right] e^{-st} dt = \frac{-1}{s-\beta} + \frac{1}{s-\alpha}, \quad \mathrm{Re}(\alpha) < \sigma < \mathrm{Re}(\beta). \tag{7.37}$$



Slika 7.5 (a) Antikauzalni signal i (b) oblast konvergencije njegove Laplasove transformacije.

Oblast konvergencije Laplasove transformacije ovog signala, za slučaj da su α i β realni, te $\alpha < 0$ i $\beta > 0$, prikazana je na Slici 7.6(b) i predstavlja dio kompleksne s ravni u kome je $\mathrm{Re}(\alpha) < \sigma < \mathrm{Re}(\beta)$.

(a)



(b)

Slika 7.6 (a) Signal i (b) oblast konvergencije njegove Laplasove transformacije.

Iz ovih primjera vidimo da je oblast konvergencije Laplasove transformacije nekauzalnog signala (koji je različit od nule i za $t > 0$ i za $t < 0$), trakasta oblast u kompleksnoj s ravni, dok je oblast konvergencije kauzalnog signala desna poluravan, a antikauzalnog lijeva poluravan kompleksne s ravni. Granice oblasti konvergencije su prave određene realnim dijelovima polova Laplasove transformacije.

Laplasova transformacija Hevisajdove funkcije:

$$x(t) = u(t), \tag{7.38}$$

koja se može posmatrati i kao specijalan slučaj $e^{-\alpha t}u(t)$ za $\alpha = 0$, je:

$$X(s) = \int_{-\infty}^{\infty} u(t)e^{-st}dt = \int_{0}^{\infty} e^{-st}dt = \frac{1}{s},\ \sigma > 0, \tag{7.39}$$

dok je Laplasova transformacija reflektovane Hevisajdove funkcije:

$$x(t) = u(-t) \tag{7.40}$$

jednaka:

$$X(s) = \int_{-\infty}^{\infty} u(-t)e^{-st}dt = \int_{-\infty}^{0} e^{-st}dt = -\frac{1}{s},\ \sigma < 0. \tag{7.41}$$

Hevisajdova i reflektovana Hevisajdova funkcija, kao i oblasti konvergencije njihovih Laplasovih transformacija, prikazane su na Slici 7.7.

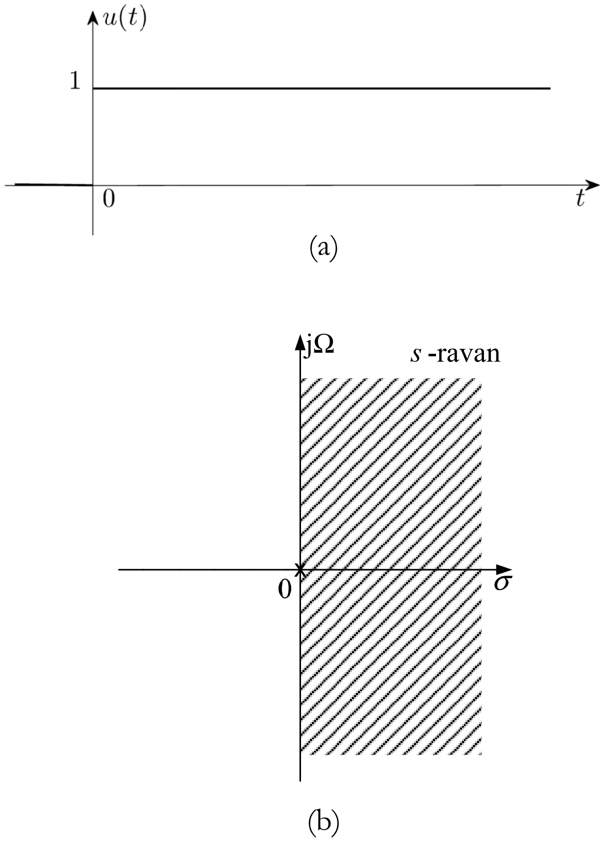
Laplasova transformacija Dirakove funkcije:

$$x(t) = \delta(t) \tag{7.42}$$

je jednaka:

$$X(s) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)e^{-st}dt = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)e^{-s\cdot 0}dt = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)dt = 1,\ \forall\sigma. \tag{7.43}$$

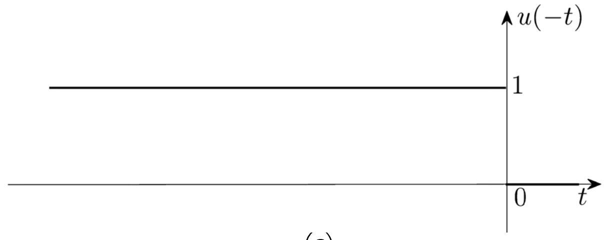
Pri tome smo koristili svojstvo odabiranja Dirakove funkcije po kome je proizvod Dirakove funkcije i bilo kog signala $x(t)$ različit od nule samo u trenutku $t = 0$ i jednak Dirakovoj funkciji čija jačina udara ima vrijednost $x(0)$, kao i činjenicu da je površina Dirakovog impulsa jednaka jedinici. Oblast konvergencije Laplasove transformacije Dirakove funkcije je cijela s ravan.



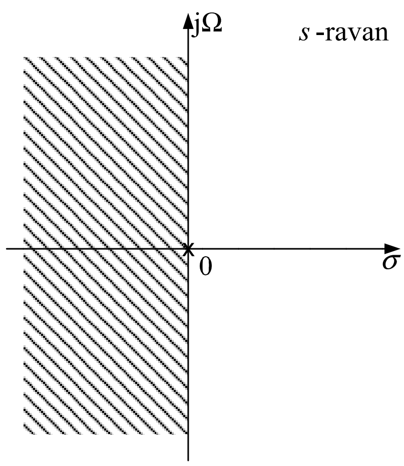
Slika 7.7 (a) Hevisajdova funkcija; (b) oblast konvergencije Laplasove transformacije Hevisajdove funkcije (nastavak na sljedećoj stranici);

Laplasovu transformaciju funkcija $\cos(\Omega_0 t)u(t)$ i $\sin(\Omega_0 t)u(t)$ možemo odrediti na sljedeći način:

$$
\begin{aligned}
\mathscr{L}\left\{\cos(\Omega_0 t)u(t)\right\} &= \frac{1}{2}\mathscr{L}\left\{e^{j\Omega_0 t}u(t)\right\} + \frac{1}{2}\mathscr{L}\left\{e^{-j\Omega_0 t}u(t)\right\} = \\
&= \frac{1}{2}\frac{1}{s-j\Omega_0} + \frac{1}{2}\frac{1}{s-j\Omega_0} = \frac{s}{s^2+\Omega_0^2},\ \sigma > 0,
\end{aligned}
\tag{7.44}
$$



(c)



(d)

Slika 7.7 (nastavak): (c) reflektovana Hevisajdova funkcija; (d) oblast konvergencije Laplasove transformacije reflektovane Hevisajdove funkcije.

$$\begin{aligned}\mathscr{L}\left\{\sin(\Omega_0 t)u(t)\right\} &= \frac{1}{2j}\mathscr{L}\left\{e^{j\Omega_0 t}u(t)\right\} - \frac{1}{2j}\mathscr{L}\left\{e^{-j\Omega_0 t}u(t)\right\} = \\ &= \frac{1}{2j}\frac{1}{s-j\Omega_0} - \frac{1}{2j}\frac{1}{s-j\Omega_0} = \frac{\Omega_0}{s^2+\Omega_0^2},\ \sigma > 0.\end{aligned} \tag{7.45}$$

Oblast konvergencije Laplasove transformacije kauzalnog signala koji se dobije množenjem kosinusoide ili sinusoide sa Hevisajdovom funkcijom je desna poluravan kompleksne s ravni.

7.5 Osobine Laplasove transformacije

Zbog većeg praktičnog značaja, zadržaćemo se na osobinama unilateralne Laplasove transformacije, na osnovu kojih se dolazi do pravila koja pojednostavljuju njenu primjenu.

7.5.1 Linearnost

Laplasova transformacija linearne kombinacije signala jednaka je linearnoj kombinaciji njihovih Laplasovih transformacija u presjeku oblasti konvergencija. Ako postoje transformacioni parovi $x_1(t) \leftrightarrow X_1(s),\ \mathrm{Re}\{s\} > \alpha_1$ i $x_2(t) \leftrightarrow X_2(s),\ \mathrm{Re}\{s\} > \alpha_2$, tada je:

$$ax_1(t) + bx_2(t) \leftrightarrow aX_1(s) + bX_2(s),\ \forall a, b \in \mathbb{C},\ \mathrm{Re}\{s\} > \max\{\alpha_1, \alpha_2\}. \tag{7.46}$$

Dokaz:

Laplasova transformacija je definisana integralom, pa zbog linearnosti operatora direktno slijedi:

$$\begin{aligned} \mathscr{L}\{ax_1(t) + bx_2(t)\} &= \int_{0_-}^{\infty} \left[ax_1(t) + bx_2(t)\right] e^{-st} = \\ &= a\int_{0_-}^{\infty} x_1(t) e^{-st} + b\int_{0_-}^{\infty} x_2(t) e^{-st} = \\ &= aX_1(s) + bX_2(s). \end{aligned} \tag{7.47}$$

Pri tome oba signala moraju ispunjavati uslov apsolutne integrabilnosti. Ako su oblasti konvergencije njihovih Laplasovih transformacija $X_1(s)$ i $X_2(s)$ date sa $\mathrm{Re}\{s\} > \alpha_1$ i $\mathrm{Re}\{s\} > \alpha_2$ respektivno, tada je oblast konvergencije Laplasove transformacije linearne kombinacije signala jednaka $\mathrm{Re}\{s\} > \max\{\alpha_1, \alpha_2\}$.

□

7.5.2 Pomak u vremenskom domenu

Pomjeranje kauzalnog signala u vremenu za $t_0 > 0$ dovodi do množenja Laplasove transformacije sa kompleksnom eksponencijalnom funkcijom e^{-st_0}. Ako za kauzalan signal vrijedi da je $x(t) \leftrightarrow X(s)$, $\mathrm{Re}\{s\} > \alpha$, tada je:

$$x(t-t_0) \leftrightarrow e^{-st_0} X(s),\ \mathrm{Re}\{s\} > \max\{0,\alpha\}. \tag{7.48}$$

Dokaz:

Laplasovu transformaciju kauzalnog signala pomjerenog u vremenu za $t_0 > 0$ dobijamo na osnovu definicionog izraza:

$$\begin{aligned}\mathscr{L}\{x(t-t_0)\} &= \int_{0_-}^{\infty} x(t-t_0)e^{-st}dt\Big|_{t-t_0=\tau} = \int_{-t_0}^{\infty} x(\tau)e^{-s\tau}e^{-st_0}d\tau = \\ &= e^{-st_0}\left[\int_{-t_0}^{0_-} x(t)e^{-st}dt + \int_{0_-}^{\infty} x(t)e^{-st}dt\right] = e^{-st_0}X(s).\end{aligned} \tag{7.49}$$

U poslednjem izrazu je integral koji se računa od $-t_0$ do 0_- jednak nuli zbog pretpostavljene kauzalnosti signala.

Laplasova transformacija signala pomjerenog u vremenu konvergira u onom dijelu kompleksne s ravni u kom konvergiraju e^{-st_0} i $X(s)$, tj. za $\mathrm{Re}\{s\} > \max\{0,\alpha\}$.

□

7.5.3 Pomak u domenu kompleksne učestanosti

Množenje signala u vremenu sa kompleksnom eksponencijalnom funkcijom $e^{s_0 t}$ ima za posljedicu pomjeranje u kompleksnoj s ravni za s_0. Ako je $x(t) \leftrightarrow X(s)$, $\mathrm{Re}\{s\} > \alpha$, tada vrijedi da je:

$$x(t)\cdot e^{s_0 t} \leftrightarrow X(s-s_0),\ \mathrm{Re}\{s\} > \alpha + \mathrm{Re}\{s_0\}. \tag{7.50}$$

Dokaz:

Potražimo Laplasovu transformaciju od $x(t)\cdot e^{s_0 t}$:

$$\mathscr{L}\left\{x(t)\cdot e^{s_0 t}\right\}=\int_{0_-}^{\infty} x(t)e^{s_0 t}e^{-st}dt=\int_{0_-}^{\infty} x(\tau)e^{-(s-s_0)t}d\tau\,. \tag{7.51}$$

Isti rezultat ćemo dobiti ako u definicionom izrazu za Laplasovu transformaciju zamijenimo s sa $s-s_0$, što znači da je:

$$\mathscr{F}\left\{x(t)\cdot e^{s_0 t}\right\}=X(s-s_0)\,. \tag{7.52}$$

Uslov apsolutne konvergencije je $\operatorname{Re}\{s-s_0\}>\alpha \Rightarrow \operatorname{Re}\{s\}>\alpha+\operatorname{Re}\{s_0\}$.

□

7.5.4 Skaliranje

Proširivanje ili sužavanje (jednom riječju skaliranje) signala u jednom domenu dovodi do sužavanja odnosno proširivanja signala u drugom domenu. Ako postoji transformacioni par $x(t)\leftrightarrow X(s)$, $\operatorname{Re}\{s\}>\alpha$, tada za $a>0$ vrijedi:

$$x(at)\leftrightarrow \frac{1}{a}X\left(\frac{s}{a}\right),\ \operatorname{Re}\{s\}>a\cdot\alpha\,. \tag{7.53}$$

Dokaz:

Na osnovu definicionog izraza za Laplasovu transformaciju imamo:

$$\begin{aligned}\mathscr{L}\left\{x(at)\right\}&=\left.\int_{0_-}^{\infty} x(at)e^{-st}dt\right|_{at\to\tau}=\frac{1}{a}\int_{a\cdot 0_-}^{a\cdot\infty} x(\tau)e^{-s\frac{\tau}{a}}d\tau=\\&=\frac{1}{a}\int_{0_-}^{\infty} x(\tau)e^{-\frac{s}{a}\tau}d\tau=\frac{1}{a}X\left(\frac{s}{a}\right).\end{aligned} \tag{7.54}$$

Uslov apsolutne konvergencije Laplasove transformacije skaliranog signala je $\mathrm{Re}\left\{\frac{s}{a}\right\} > \alpha$, odnosno $\mathrm{Re}\{s\} > a \cdot \alpha$

□

Pretpostavili smo da je $a > 0$, jer za $a < 0$, osim skaliranja, dolazi i do refleksije signala, te bismo pri radu sa unilateralnom transformacijom morali da računamo integral i po dijelu signala koji ne poznajemo.

7.5.5 Konvolucija u vremenskom domenu

Ako za kauzalne signale postoje transformacioni parovi $x_1(t) \leftrightarrow X_1(s)$, $\mathrm{Re}\{s\} > \alpha_1$ i $x_2(t) \leftrightarrow X_2(s)$, $\mathrm{Re}\{s\} > \alpha_2$, tada konvoluciji signala u vremenskom domenu odgovara množenje u kompleksnoj s ravni:

$$x_1(t) * x_2(t) \leftrightarrow X_1(s) \cdot X_2(s),\ \mathrm{Re}\{s\} > \max\{\alpha_1, \alpha_2\}. \tag{7.55}$$

Dokaz:

Prilikom računanja konvolucije kauzalnih signala podrazumijevamo da obuhvatamo i Dirakove impulse u nuli koji se eventualno pojavljuju u signalima. Kako bismo to naglasili, korektnije je pisati konvolucioni integral kauzalnih signala sa donjom granicom 0_-, umjesto 0. Laplasova transformacija konvolucije dva kauzalna signala je:

$$\mathscr{L}\{x_1(t) * x_2(t)\} = \int_{0_-}^{\infty} \left[x_1(t) * x_2(t)\right] e^{-st} dt = \int_{0_-}^{\infty} \left[\int_{0_-}^{\infty} x_1(\tau) x_2(t-\tau) d\tau\right] e^{-st} dt. \tag{7.56}$$

Nakon zamjene redoslijeda integraljenja:

$$\mathscr{L}\{x_1(t) * x_2(t)\} = \int_{0_-}^{\infty} x_1(\tau) \left[\int_{0_-}^{\infty} x_2(t-\tau) e^{-st} dt\right] d\tau \tag{7.57}$$

i smjene varijabli $\theta = t - \tau$:

$$\mathscr{L}\left\{x_1(t)*x_2(t)\right\}=\int_{0_-}^{\infty}x_1(\tau)\left[\int_{0_-}^{\infty}x_2(\theta)e^{-s\theta}d\theta\right]e^{-s\tau}d\tau\,, \tag{7.58}$$

te konačno dobijamo:

$$\mathscr{L}\left\{x_1(t)*x_2(t)\right\}=\left[\int_{0_-}^{\infty}x_2(\theta)e^{-s\theta}d\theta\right]\cdot\left[\int_{0_-}^{\infty}x_1(\tau)e^{-s\tau}d\tau\right]=X_2(s)\cdot X_1(s)\,. \tag{7.59}$$

Laplasova transformacija konvergira u onom dijelu kompleksne s ravni gdje konvergiraju Laplasove transformacije pojedinačnih signala.

□

7.5.6 Konvolucija u domenu kompleksne učestanosti

Ako postoje transformacioni parovi $x_1(t)\leftrightarrow X_1(s)$, $\mathrm{Re}\{s\}>\alpha_1$ i $x_2(t)\leftrightarrow X_2(s)$, $\mathrm{Re}\{s\}>\alpha_2$, tada množenju signala u vremenskom domenu odgovara konvolucija u kompleksnoj s ravni:

$$x_1(t)\cdot x_2(t)\leftrightarrow\frac{1}{2\pi j}X_1(s)*X_2(s)\,. \tag{7.60}$$

Oblast konvergencije Laplasove transformacije proizvoda dva signala se dobije iz uslova da je $\alpha_1<\mathrm{Re}\{z\}>\mathrm{Re}\{s\}-\alpha_2$, ili $\alpha_2<\mathrm{Re}\{z\}>\mathrm{Re}\{s\}-\alpha_1$.

Dokaz:

Konvoluciju u kompleksnoj s ravni definišemo sa:

$$X_1(s)*X_2(s)=\int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty}X_1(z)X_2(s-z)dz=\int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty}X_1(s-z)X_2(z)dz\,, \tag{7.61}$$

pri čemu je z promjenljiva integracije. Inverzna Laplasova transformacija (7.60) je:

$$\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{2\pi j}X_1(s)*X_2(s)\right\}=\frac{1}{2\pi j}\int\limits_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty}\left[\frac{1}{2\pi j}X_1(s)*X_2(s)\right]e^{st}ds=$$
$$=\left(\frac{1}{2\pi j}\right)^2\int\limits_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty}\left[\int\limits_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty}X_1(z)X_2(s-z)dz\right]e^{st}ds. \tag{7.62}$$

Iz uslova za oblasti konvergencije Laplasovih transformacija $X_1(s)$ i $X_2(s)$, slijedi da je u (7.62) $\mathrm{Re}\{z\}>\alpha_1$ i $\mathrm{Re}\{s-z\}>\alpha_2$, odnosno $\alpha_1<\mathrm{Re}\{z\}<\mathrm{Re}\{s\}-\alpha_2$. Nakon zamjene redoslijeda integraljenja:

$$\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{2\pi j}X_1(s)*X_2(s)\right\}=\left(\frac{1}{2\pi j}\right)^2\int\limits_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty}X_1(z)\left[\int\limits_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty}X_2(s-z)e^{-st}ds\right]dz \tag{7.63}$$

i smjene varijabli $q=s-z$:

$$\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{2\pi j}X_1(s)*X_2(s)\right\}=\left(\frac{1}{2\pi j}\right)^2\int\limits_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty}X_1(z)\left[\int\limits_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty}X_2(q)e^{qt}dq\right]e^{zt}dz, \tag{7.64}$$

dobijamo:

$$\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{2\pi j}X_1(s)*X_2(s)\right\}=\left[\frac{1}{2\pi j}\int\limits_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty}X_2(q)e^{qt}dq\right]\left[\frac{1}{2\pi j}\int\limits_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty}X_1(z)e^{zt}dz\right], \tag{7.65}$$

$$\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{2\pi j}X_1(s)*X_2(s)\right\}=x_1(t)\cdot x_2(t). \tag{7.66}$$

Slično se dokazuje i za drugi oblik konvolucije u kompleksnoj s ravni.

□

7.5.7 Deriviranje u vremenskom domenu

Pretpostavimo da signal $x(t)$ nema prekida za $t\geq 0$ i da postoji transformacioni par $x(t)\leftrightarrow X(s)$, $\mathrm{Re}\{s\}>\alpha$. Tada je:

$$\frac{dx(t)}{dt} \leftrightarrow sX(s) - x(0_{-}), \tag{7.67}$$

dok za derivaciju n-tog reda $D^n x(t) = \dfrac{d^n x(t)}{dt^n}$ vrijedi:

$$\frac{d^n x(t)}{dt^n} \leftrightarrow s^n X(s) - s^{n-1}x(0_{-}) - s^{n-2}Dx(0_{-}) - \cdots - sD^{n-2}x(0_{-}) - D^{n-1}x(0_{-}). \tag{7.68}$$

Ako signal $x(t)$ ima prekid u tački $t = t_0$ i ako na osnovu njega formiramo kontinualan signal $x_1(t)$ takav da je:

$$x_1(t) = \begin{cases} x(t) & t > t_0 \\ x(t_{0+}) & t = t_0 \\ x(t) + \left[x(t_{0+}) - x(t_{0-})\right] & t < t_0 \end{cases}, \tag{7.69}$$

kao na Slici 7.8, tada je:

$$\frac{dx(t)}{dt} \leftrightarrow sX_1(s) - x_1(0_{-}) + \left[x(t_{0+}) - x(t_{0-})\right]e^{-t_0 s}. \tag{7.70}$$

Za signal $x(t)$ koji ima samo prekid u nuli vrijedi jednako kao za signale koji nemaju prekida:

$$\frac{dx(t)}{dt} \leftrightarrow sX(s) - x(0_{-}). \tag{7.71}$$

Oblast konvergencije može da se promijeni u smislu uključivanja ili isključivanja tačaka u nuli i/ili beskonačnosti.

Dokaz:

Laplasovu transformaciju prvog izvoda neprekidnog signala $Dx(t) = \dfrac{dx}{dt}$ možemo odrediti koristeći parcijalnu integraciju:

$$\mathscr{L}\{Dx(t)\} = \int_{0_{-}}^{\infty} \frac{dx}{dt} e^{-st} dt = x(t)e^{-st}\Big|_{0_{-}}^{\infty} + s\int_{0_{-}}^{\infty} x(t)e^{-st} dt = sX(s) - x(0_{-}). \tag{7.72}$$

Nastavljajući postupak, za drugi izvod $D^2x(t)=\dfrac{d^2x}{dt^2}$ dobijamo:

$$\mathscr{L}\left\{D^2x(t)\right\}=s\mathscr{L}\left\{Dx(t)\right\}-Dx(0_-)=s^2X(s)-sx(0_-)-Dx(0_-), \tag{7.73}$$

a matematičkom indukcijom, za izvod n-tog reda:

$$\mathscr{L}\left\{D^nx(t)\right\}=s^nX(s)-s^{n-1}x(0_-)-\cdots-sD^{n-2}x(0_-)-D^{n-1}x(0_-). \tag{7.74}$$

Ako signal $x(t)$ ima prekid u tački $t=t_0$, na osnovu njega formirajmo neprekidan signal $x_1(t)$, kao na Slici 7.8. Pošto je generalisani izvod signala $x(t)$ jednak izvodu signala $x_1(t)$, osim u tački prekida (vidi Sliku 7.9), vrijedi da je:

$$\frac{dx(t)}{dt}=\frac{dx_1(t)}{dt}+\left[x(t_{0+})-x(t_{0-})\right]\delta(t-t_0). \tag{7.75}$$

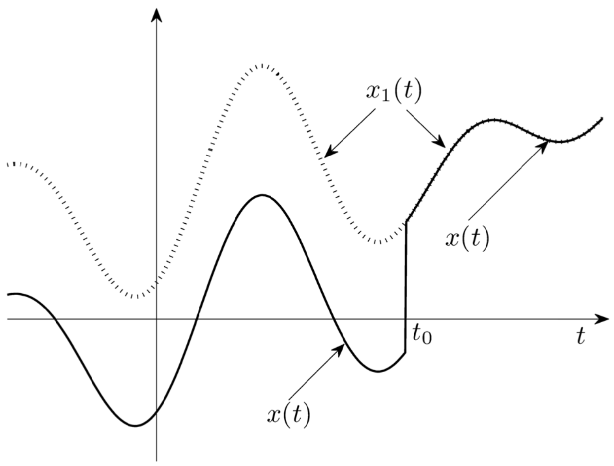
Napomenimo da smo generalisani izvod uveli u Glavi 2, a slike 7.8 i 7.9 su ponovljene radi preglednosti izlaganja.

Laplasova transformacija prvog izvoda je:

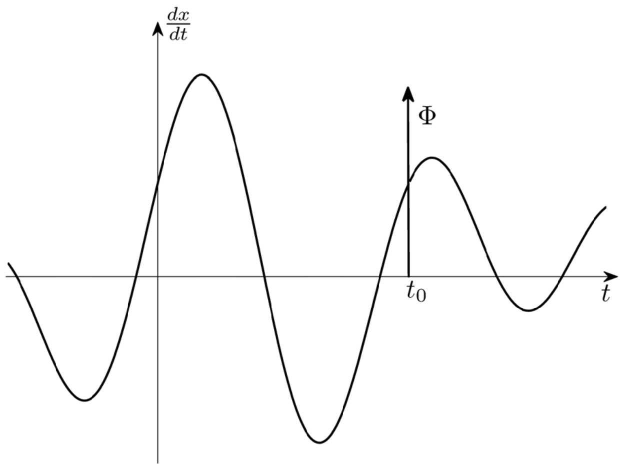
$$\mathscr{L}\left\{\frac{dx(t)}{dt}\right\}=\mathscr{L}\left\{\frac{dx_1(t)}{dt}\right\}+\left[x(t_{0+})-x(t_{0-})\right]e^{-st_0}, \tag{7.76}$$

$$\mathscr{L}\left\{\frac{dx(t)}{dt}\right\}=sX_1(s)-x_1(0_-)+\left[x(t_{0+})-x(t_{0-})\right]e^{-st_0}. \tag{7.77}$$

U praksi su od posebnog značaja signali koji imaju prekid samo u $t_0=0$. Za takve signale su unilateralne Laplasove transfromacije $X(s)$ i $X_1(s)$ jednake, jer se signali $x(t)$ i $x_1(t)$ za $t\geq 0$ razlikuju samo u $t=0$, a od ranije znamo da signali koji se razlikuju u konačnom broju diskretnih tačaka za konačne vrijednosti imaju jednake Laplasove transformacije. Osim toga, budući da smo neprekidni signal $x_1(t)$ definisali tako da u tački prekida signala $x(t)$ vrijedi $x_1(t_0)=x(t_{0+})$, slijedi da je $x_1(0_-)=x_1(0_+)=x(0_+)$.



Slika 7.8 Signal $x(t)$ sa prekidom u tački $t = t_0$ (puna linija) i njemu pridruženi signal bez prekida $x_1(t)$ (isprekidana linija).



Slika 7.9 Generalisani izvod signala $x(t)$ koji ima prekid u tački $t = t_0$, $\mathbf{\Phi} = x(t_{0+}) - x(t_{0-})$.

Prema tome, za Laplasovu transformaciju izvoda signala koji imaju prekid samo u $t=0$ dobijamo isti izraz kao za Laplasovu transformaciju signala koji nemaju prekide:

$$\mathscr{L}\left\{\frac{dx(t)}{dt}\right\}=sX_1(s)-x_1(0_-)+\left[x(0_+)-x(0_-)\right]e^{-s\cdot 0}=sX(s)-x(0_-)\,. \quad (7.78)$$

Pri ovim operacijama oblast konvergencije se ne mijenja, izuzev što zbog množenja sa s^n može doći do poništavanja eventualnih polova u nuli ili dodavanja novih polova u beskonačnosti.

□

7.5.8 Deriviranje u domenu kompleksne učestanosti

Ako postoji transformacioni par $x(t)\leftrightarrow X(s)$, $\mathrm{Re}\{s\}>\alpha$, tada za n-ti izvod u domenu kompleksne učestanosti s vrijedi:

$$t^n x(t)\leftrightarrow(-1)^n\frac{d^nX(s)}{ds^n},\ n=1,2,3... \quad (7.79)$$

Dokaz:

Prvi izvod u domenu kompleksne učestanosti s daje:

$$\begin{aligned}\frac{dX(s)}{ds}&=\frac{d}{ds}\left[\int_{0_-}^{\infty}x(t)e^{-st}dt\right]=\int_{0_-}^{\infty}\frac{d}{ds}\left[x(t)e^{-st}\right]dt=\\&=\int_{0_-}^{\infty}\left[-tx(t)\right]e^{-st}dt=\mathscr{L}\left\{-tx(t)\right\}.\end{aligned} \quad (7.80)$$

Na sličan način, za drugi izvod u domenu kompleksne učestanosti s dobijamo:

$$\frac{d^2X(s)}{ds^2}=\int_{0_-}^{\infty}\left[(-t)^2x(t)\right]e^{-st}dt=\mathscr{L}\left\{(-t)^2x(t)\right\}. \quad (7.81)$$

Indukcijom se pokaže da za n-ti izvod u domenu kompleksne učestanosti s vrijedi:

$$\frac{d^n X(s)}{ds^n} = \int_{0_-}^{\infty} \left[(-t)^n x(t) \right] e^{-st} dt = \mathscr{L}\left\{ (-t)^n x(t) \right\}, \tag{7.82}$$

odnosno da je:

$$t^n x(t) \leftrightarrow (-1)^n \frac{d^n X(s)}{ds^n}. \tag{7.83}$$

Oblast konvergencije se može promijeniti i potrebno ju je odrediti za svaki slučaj posebno.

□

7.5.9 Integraljenje u vremenskom domenu

Ako postoji transformacioni par $x(t) \leftrightarrow X(s)$, $\mathrm{Re}\{s\} > \alpha$, tada integraljenje u vremenskom domenu dovodi do dijeljenja Laplasove transformacije sa kompleksnom učestanošću s:

$$\int_0^t x(\tau) d\tau \leftrightarrow \frac{X(s)}{s}. \tag{7.84}$$

Oblast konvergencije može da se promijeni u smislu uključivanja ili isključivanja tačaka u beskonačnosti i/ili nuli.

Dokaz:

Integral (7.84) jednak je konvoluciji signala $x(t)$ i Hevisajdove funkcije $u(t)$, pa na osnovu osobine konvolucije u vremenskom domenu direktno dobijamo:

$$\int_0^t x(\tau) d\tau = \int_0^t x(\tau) u(t-\tau) d\tau = x(t) * u(t) \leftrightarrow X(s) \cdot \frac{1}{s}. \tag{7.85}$$

Zbog dijeljenja sa s, oblast konvergencije može da se promijeni u smislu uključivanja ili isključivanja tačke u beskonačnosti i/ili nuli.

□

7.5.10 Integraljenje u domenu kompleksne učestanosti

Ako postoji transformacioni par $x(t) \leftrightarrow X(s)$, $\mathrm{Re}\{s\} > \alpha$, tada integraljenje u domenu kompleksne učestanosti dovodi do dijeljenja sa varijablom t u vremenskom domenu:

$$\frac{x(t)}{t} \leftrightarrow \int_s^\infty X(s)\,ds. \tag{7.86}$$

Dokaz:

Integraljenjem Laplasove transformacije u granicama od s do ∞ dobijamo:

$$\begin{aligned}\int_s^\infty\left[\int_{0_-}^\infty x(t)e^{-qt}dt\right]dq &= \int_{0_-}^\infty x(t)\left[\int_s^\infty e^{-qt}dq\right]dt = \int_{0_-}^\infty x(t)\left[-\frac{1}{t}e^{-qt}\bigg|_s^\infty\right]dt = \\ &= \int_{0_-}^\infty \frac{x(t)}{t}e^{-st}dt = \mathscr{L}\left\{\frac{x(t)}{t}\right\}.\end{aligned} \tag{7.87}$$

Oblast konvergencije je potrebno odrediti za svaki slučaj posebno.

□

7.5.11 Početna vrijednost originala

Ako je signal $x(t)$ neprekidan ili ima prekid samo u nuli, početna vrijednost originala $x(0_+)$ se može odrediti bez traženja inverzne Laplasove transformacije na sljedeći način:

$$x(0_+) = \lim_{s\to\infty} sX(s). \tag{7.88}$$

Dokaz:

Laplasova transformacija izvoda signala $x(t)$, koji je neprekidan ili ima prekid samo u nuli, je data sa:

$$\mathscr{L}\left\{\frac{dx(t)}{dt}\right\} = sX(s) - x(0_-). \tag{7.89}$$

Budući da za neprekidne signale vrijedi da je:

$$\lim_{s\to\infty} \mathscr{L}\left\{\frac{dx(t)}{dt}\right\} = \lim_{s\to\infty} \int_{0_-}^{\infty} \frac{dx(t)}{dt} e^{-st} dt \to 0, \tag{7.90}$$

slijedi:

$$\lim_{s\to\infty} sX(s) = x(0_-). \tag{7.91}$$

Za neprekidne signale vrijedi da je $x(0_-) = x(0_+)$, te je:

$$\lim_{s\to\infty} sX(s) = x(0_+). \tag{7.92}$$

Ako signal $x(t)$ ima prekid u nuli, Laplasova transformacija njegovog izvoda se može napisati kao:

$$\begin{aligned}\mathscr{L}\left\{\frac{dx(t)}{dt}\right\} &= \int_{0_-}^{\infty} \frac{dx(t)}{dt} e^{-st} dt = \int_{0_-}^{\infty} \left[x(0_+) - x(0_-)\right]\delta(t) e^{0\cdot t} dt + \int_{0_+}^{\infty} \frac{dx(t)}{dt} e^{-st} dt = \\ &= x(0_+) - x(0_-) + \int_{0_+}^{\infty} \frac{dx(t)}{dt} e^{-st} dt,\end{aligned} \tag{7.93}$$

tako da je:

$$\lim_{s\to\infty} \int_{0_-}^{\infty} \frac{dx(t)}{dt} e^{-st} dt = x(0_+) - x(0_-). \tag{7.94}$$

S druge strane, na osnovu pravila izvoda imamo:

$$\lim_{s\to\infty} \int_{0_-}^{\infty} \frac{dx(t)}{dt} e^{-st} dt = \lim_{s\to\infty} sX(s) - x(0_-), \tag{7.95}$$

te je konačno:

$$x(0_+) = \lim_{s\to\infty} sX(s). \tag{7.96}$$

□

7.5.12 Krajnja vrijednost originala

Ako oblast konvergencije Laplasove transformacije signala $x(t)$ obuhvata imaginarnu osu kompleksne s ravni, krajnju vrijednost originalnog signala možemo odrediti bez traženja inverzne Laplasove transformacije na sljedeći način:

$$\lim_{t\to\infty} x(t) = \lim_{s\to 0} sX(s). \tag{7.97}$$

Dokaz:

Granična vrijednost Laplasove transformacije izvoda signala $x(t)$, kada $s \to 0$, je:

$$\lim_{s\to 0} \int_{0_-}^{\infty} \frac{dx(t)}{dt} e^{-st} dt = \int_{0_-}^{\infty} \frac{dx(t)}{dt} dt = \lim_{t\to\infty} x(t) - x(0_-), \tag{7.98}$$

dok na osnovu pravila izvoda imamo:

$$\lim_{s\to 0} \int_{0_-}^{\infty} \frac{dx(t)}{dt} e^{-st} dt = \lim_{s\to 0} sX(s) - x(0_-). \tag{7.99}$$

Na osnovu dvije poslednje relacije zaključujemo da je:

$$\lim_{t\to\infty} x(t) = \lim_{s\to 0} sX(s). \tag{7.100}$$

□

Zbirni pregled osobina unilateralne Laplasove transformacije dat je u Tabeli 7.1

Tabela 7.1. Osobine unilateralne Laplasove transformacije.

Osobina	$x(t)$	$X(s)$
Linearnost	$ax_1(t)+bx_2(t)$	$aX_1(s)+bX_2(s),\ \forall a,b\in\mathbb{C}$
Pomak u vremenskom domenu	$x(t-t_0)$	$e^{-st_0}X(s)$
Pomak u domenu kompleksne učestanosti	$x(t)\cdot e^{s_0 t}$	$X(s-s_0)$
Skaliranje	$x(at),\ a>0$	$\frac{1}{a}X\left(\frac{s}{a}\right)$
Konvolucija u vremenskom domenu	$x_1(t)*x_2(t)$	$X_1(s)\cdot X_2(s)$
Konvolucija u domenu kompleksne učestanosti	$x_1(t)\cdot x_2(t)$	$\frac{1}{2\pi}X_1(s)*X_2(s)$
Prvi izvod u vremenskom domenu	$\frac{dx(t)}{dt}$	$sX(s)-x(0_-)$
Izvod n -tog reda u vremenskom domenu	$\frac{d^n x(t)}{dt^n}$	$s^n X(s)-s^{n-1}x(0_-)-s^{n-2}x^{(1)}(0_-)-$ $\cdots-sx^{(n-2)}(0_-)-x^{(n-1)}(0_-)$
Deriviranje u domenu kompleksne učestanosti	$t^n x(t)$	$(-1)^n\frac{d^n X(s)}{ds^n}$
Integraljenje u vremenskom domenu	$\int_0^t x(\tau)d\tau$	$\frac{X(s)}{s}$
Integraljenje u domenu kompleksne učestanosti	$\frac{x(t)}{t}$	$\int_s^\infty X(s)ds$
Početna vrijednost originala	$x(0_+)=\lim\limits_{s\to\infty}sX(s)$	
Krajnja vrijednost originala	$\lim\limits_{t\to\infty}x(t)=\lim\limits_{s\to 0}sX(s)$	

7.6 Metodi određivanja inverzne Laplasove transformacije

Vremenski oblik signala se rijetko pronalazi direktnim izračunavanjem konturnog integrala, jer postoje jednostavniji načini za određivanje inverzne Laplasove transformacije. U opštem slučaju može se koristiti Košijeva teorema ostataka za izračunavanje konturnog integrala inverzne Laplasove transformacije. Kod jednostavnih oblika funkcija, problem se može riješiti tabličnim metodom, poznavajući Laplasove transformacije elementarnih signala i pravila koja proističu iz osobina Laplasove transformacije. Ako je Laplasova transformacija racionalna funkcija, onda se inverzna Laplasova transformacija lako odredi razvojem na parcijalne razlomke. Ovaj metod koristi osobinu linearnosti, tako da se tražena inverzna Laplasova transformacija određuje kao zbir inverznih Laplasovih transformacija pojedinačnih parcijalnih razlomaka u razvoju, koje se određuju tabličnim metodom.

7.6.1 Određivanje inverzne Laplasove transformacije pomoću Košijeve teoreme ostataka

Iz matematičke analize je poznato da se konturni integral (7.30) kompleksne funkcije, koja je analitička na i unutar konture C orijentisane suprotno kretanju kazaljke na satu, osim u konačnom broju izolovanih singulariteta, može izračunati kao suma reziduuma (ostataka) u polovima kompleksne podintegralne funkcije $X(s)e^{st}$. Ako je kontura C orijentisana u smjeru kretanja kazaljke na satu, kao u (7.31), konturni integral je jednak negativnoj sumi reziduuma u polovima kompleksne podintegralne funkcije $X(s)e^{st}$.

Neka je sa N_+ označen ukupan broj polova funkcije $X(s)e^{st}$ koji se nalaze lijevo od njene oblasti konvergencije. Inverzna Laplasova transformacija (7.30) za $t>0$ se određuje računanjem ostataka u polovima p_i, $i=1,...,N_+$ na sljedeći način:

$$x(t)=\sum_{i=1}^{N_+} Res\left[X(s)e^{st},p_i\right],\ t>0\,. \tag{7.101}$$

Ako sa N_- označimo ukupan broj polova funkcije $X(s)e^{st}$ koji se nalaze desno od njene oblasti konvergencije, inverzna Laplasova transformacija (7.31) za $t<0$ određuje se računanjem ostataka u polovima p_i, $i=1,...,N_-$. Kontura integracije je orijentisana u smjeru kretanja kazaljke na satu, pa je:

$$x(t)=-\sum_{i=1}^{N_-} Res\left[X(s)e^{st},p_i\right],\ t<0. \tag{7.102}$$

Za proste polove p_i ostaci se računaju na sljedeći način:

$$Res\left[X(s)e^{st},p_i\right]=\lim_{s\to p_i}(s-p_i)X(s)e^{st}, \tag{7.103}$$

dok za r ostataka u polu p_i koji je r-tog reda vrijedi:

$$Res_j\left[X(s)e^{st},p_i\right]=\frac{1}{(j-1)!}\lim_{s\to p_i}\frac{d^{j-1}}{ds^{j-1}}\left[(s-p_i)^r X(s)e^{st}\right],\ j=1,2,\ldots,r. \tag{7.104}$$

<u>Primjer 7.1:</u>

Odrediti inverznu Laplasovu transformaciju od $X(s)=\dfrac{2}{s(s+1)(s+2)}$, ako je oblast konvergencije $-2<\mathrm{Re}\{s\}<-1$.

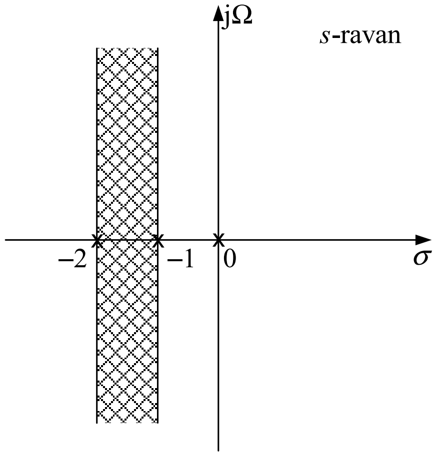
Rješenje:

Polovi funkcije $X(s)$ i njena oblast konvergencije prikazani su na Slici 7.10.

Kako bismo pronašli inverznu Laplasovu transformaciju za $t>0$ računamo ostatak u polu $s_1=-2$ koji se nalazi lijevo od oblasti konvergencije:

$$x(t)=\lim_{s\to-2}(s+2)\frac{2}{s(s+1)(s+2)}e^{st}=e^{-2t}. \tag{7.105}$$

Inverznu Laplasovu transformaciju za $t<0$ računamo preko ostataka u polovima $s_2=-1$ i $s_3=0$ koji se nalazi desno od oblasti konvergencije:



Slika 7.10 Polovi i oblast konvergencije zadate Laplasove transformacije.

$$x(t) = -\lim_{s\to -1}(s+1)\frac{2}{s(s+1)(s+2)}e^{st} - \lim_{s\to 0} s\frac{2}{s(s+1)(s+2)}e^{st} = 2e^{-t} - 1 . \quad (7.106)$$

Vrijednost inverzne Laplasove transformacije u nuli je:

$$x(0) = \frac{1}{2}\left[x(0_-) + x(0_+)\right] = 1 . \quad (7.107)$$

Dakle, inverzna Laplasova transformacija je data sa:

$$x(t) = \begin{cases} e^{-2t}, & t \geq 0 \\ 2e^{-t} - 1, & t < 0 \end{cases} . \quad (7.108)$$

□

7.6.2 Tablični metod određivanja inverzne Laplasove transformacije

Korišćenjem tabela u kojima su dati Laplasovi transformacioni parovi elementarnih signala i pravila Laplasove transformacije, lako se odrede inverzne Laplasove transformacije najčešće korišćenih oblika funkcije $X(s)$. Neki od najvažnijih transformacionih parova su dati u Tabeli 7.2. Kombinujući ovaj metod sa razvojem funkcije u parcijalne razlomke, koji ćemo izložiti u narednom poglavlju, jednostavno se odrede i inverzne Laplasove transformacije složenijih funkcija koje nisu date tablicama. Pri tome se koristi princip superpozicije. Funkcija $X(s)$ se razvije na parcijalne razlomke, a zatim se inverzna Laplasova transformacija određuje kao zbir inverznih Laplasovih transformacija pojedinačnih parcijalnih razlomaka u razvoju.

Primjer 7.2:

Odrediti inverznu Laplasovu transformaciju od $X(s)=\dfrac{e^{-as}}{s}$, ako je oblast konvergencije $\mathrm{Re}\{s\}>0$.

Rješenje:

Iz zadate Laplasove transformacije izdvojimo član e^{-as}, koji je posljedica pomaka signala u vremenskom domenu. Za preostalu funkciju $\dfrac{1}{s}$ inverznu Laplasovu transformaciju očitamo iz tabele Laplasovih transformacionih parova:

$$u(t)\leftrightarrow\frac{1}{s}. \tag{7.109}$$

Inverznu Laplasovu transformaciju zadate funkcije pronalazimo iz (7.109) na osnovu pravila pomaka u vremenu, tako da je:

$$\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{e^{-as}}{s}\right\}=u(t-a). \tag{7.110}$$

□

Tabela 7.2. Laplasove transformacije važnijih signala.

Signal $x(t)$	Laplasova transformacija $X(s)$	Oblast konvergencije
$\delta(t)$	1	$\forall s$
$u(t)$	$\frac{1}{s}$	$\mathrm{Re}\{s\}>0$
$-u(-t)$	$\frac{1}{s}$	$\mathrm{Re}\{s\}<0$
$t\cdot u(t)$	$\frac{1}{s^2}$	$\mathrm{Re}\{s\}>0$
$\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}\cdot u(t),\ n\in\mathbb{N}$	$\frac{1}{s^n}$	$\mathrm{Re}\{s\}>0$
$e^{-at}\cdot u(t)$	$\frac{1}{s+a}$	$\mathrm{Re}\{s\}>-a$
$-e^{-at}\cdot u(-t)$	$\frac{1}{s+a}$	$\mathrm{Re}\{s\}<-a$
$te^{-at}\cdot u(t)$	$\frac{1}{(s+a)^2}$	$\mathrm{Re}\{s\}>-a$
$\sin\omega_0 t\cdot u(t)$	$\frac{\omega_0}{s+\omega_0^2}$	$\mathrm{Re}\{s\}>0$
$\cos\omega_0 t\cdot u(t)$	$\frac{s}{s+\omega_0^2}$	$\mathrm{Re}\{s\}>0$
$e^{-at}\sin\omega_0 t\cdot u(t)$	$\frac{\omega_0}{(s+a)+\omega_0^2}$	$\mathrm{Re}\{s\}>-a$
$e^{-at}\cos\omega_0 t\cdot u(t)$	$\frac{s+a}{(s+a)+\omega_0^2}$	$\mathrm{Re}\{s\}>-a$

5.6.3 Određivanje inverzne Laplasove transformacije razvojem u parcijalne razlomke

Neka je Laplasova transformacija $X(s)$ racionalna funkcija:

$$X(s)=\frac{N(s)}{D(s)}. \tag{7.111}$$

Zadržaćemo se na određivanju inverzne Laplasove transformacije kauzalnih signala, sa oblašću konvergencije $\mathrm{Re}\{s\}>\alpha$. Signali koji nisu kauzalni su od manjeg značaja, a razmatranje koje ćemo provesti se lako može uopštiti i na tu klasu signala.

Pri razvoju na parcijalne razlomke polinom u brojniku $N(s)$ stepena m se dijeli polinomom u nazivniku $D(s)$ stepena n, sve dok stepen polinoma ostatka $N_R(s)$ ne postane manji od stepena polinoma u nazivniku:

$$X(s)=\frac{N(s)}{D(s)}=\sum_{i=0}^{Q}c_i s^i+\frac{N_R(s)}{D(s)},\ Q=m-n. \tag{7.112}$$

Ako je stepen polinoma u brojniku manji od stepena polinoma u nazivniku, svi koeficijenti c_i, $i=0,1,\ldots,Q$ su jednaki nuli.

Ukoliko su svi polovi $X(s)$ prosti, razvojem na parcijalne razlomke dobijamo:

$$X(s)=\sum_{i=0}^{Q}c_i s^i+\frac{N_R(s)}{D(s)}=\sum_{i=0}^{Q}c_i s^i+\sum_{i=1}^{n}\frac{k_i}{s-p_i}, \tag{7.113}$$

gdje su koeficijenti k_i dati sa:

$$k_i=\lim_{s\to p_i}(s-p_i)\frac{N_R(s)}{D(s)},\ i=1,2,\ldots,n. \tag{7.114}$$

Primjenom Lopitalovog pravila:

$$k_i = \lim_{s \to p_i} \frac{N_R(s) + (s - p_i) N_R'(s)}{D'(s)} = \frac{N_R(p_i)}{D'(p_i)}, \tag{7.115}$$

te je:

$$X(s) = \sum_{i=0}^{Q} c_i s^i + \sum_{i=1}^{n} \frac{N_R(p_i)}{D'(p_i)} \frac{1}{s - p_i}. \tag{7.116}$$

Znajući da je:

$$e^{p_i t} u(t) \leftrightarrow \frac{1}{s - p_i}, \tag{7.117}$$

za inverznu Laplasovu transformaciju $X(s)$ iz (7.113), koristeći princip superpozicije, dobijamo:

$$x(t) = \sum_{i=0}^{Q} c_i \delta^{(i)}(t) + \left(\sum_{i=1}^{n} k_i e^{p_i t} \right) u(t). \tag{7.118}$$

U slučaju višestrukih polova izrazi postaju složeniji. Pretpostavimo da je pol p_1 reda r. Tada je $p_1 = p_2 = \cdots = p_r$. Razvoj na parcijalne razlomke u tom slučaju je dat sa:

$$X(s) = \sum_{i=0}^{Q} c_i s^i + \sum_{i=1}^{r} \frac{k_i}{(s - p_1)^{r-i+1}} + \sum_{i=r+1}^{n} \frac{k_i}{s - p_i}, \tag{7.119}$$

sa koeficijentima:

$$k_i = \frac{1}{(i-1)!} \lim_{s \to p_1} \frac{d^{i-1}}{ds^{i-1}} \left[(s - p_1)^r \frac{N_R(s)}{D(s)} \right], \; i = 1, 2, \ldots, r, \tag{7.120}$$

$$k_i = \lim_{s \to p_i} (s - p_i) \frac{N_R(s)}{D(s)}, \; i = r+1, \ldots, n. \tag{7.121}$$

Ukoliko $X(s)$ ima više višestrukih polova, za svaki višetruki pol se formira suma kao za pol p_1.

Razmotrimo određivanje inverzne Laplasove transformacije članova sume oblika $\frac{k_i}{(s-p_1)^{r-i+1}}$ u (7.119). U tu svrhu pokazaćemo da postoji transformacioni par $(-1)^n t^n x(t) \leftrightarrow \frac{d^n X(s)}{ds^n}$. Pođimo od poznatog transformacionog para:

$$e^{p_1 t}u(t) \leftrightarrow \frac{1}{s-p_1}. \tag{7.122}$$

Primijenimo pravilo izvoda Laplasove transformacije u domenu kompleksne učestanosti s :

$$t^n x(t) \leftrightarrow (-1)^n \frac{d^n X(s)}{ds^n},\ n=1,2,3\ldots, \tag{7.123}$$

na transformacioni par (7.122). Za $n=1$ dobije se:

$$te^{p_1 t}u(t) \leftrightarrow \frac{1}{(s-p_1)^2}, \tag{7.124}$$

a za $(r-i)$-ti izvod transformacioni par:

$$\frac{t^{r-i}}{(r-i)!}e^{p_1 t}u(t) \leftrightarrow \frac{1}{(s-p_1)^{r-i+1}}. \tag{7.125}$$

Budući da sada znamo transformacione parove za sve članove suma u (7.119), inverzna Laplasova transformacija se dobija u obliku:

$$x(t) = \sum_{i=0}^{Q} c_i \delta^{(i)}(t) + \left[\sum_{i=1}^{r} k_i \frac{t^{r-i}}{(r-i)!} e^{p_1 t} + \sum_{i=r+1}^{n} k_i e^{p_i t} \right] u(t). \tag{7.126}$$

Primjer 7.3:

Odrediti vremenski oblik kauzalnog signala čija je Laplasova transformacija $X(s)=\dfrac{s+4}{(s+1)(s+2)(s+3)}$.

Rješenje:

Zadata Laplasova transformacija je racionalna funkcija sa jednostrukim polovima $p_1=-1$, $p_2=-2$ i $p_3=-3$. Znamo da se radi o Laplasovoj transformaciji kauzalnog signala, što znači da je oblast konvergencije ove Laplasove transformacije $\mathrm{Re}\{s\}>-1$. Polinom u brojniku $X(s)$ je veći od polinoma u nazivniku, te razvojem funkcije $X(s)$ na parcijalne razlomke dobijamo:

$$X(s)=\frac{s+4}{(s+1)(s+2)(s+3)}=\frac{k_1}{s+1}+\frac{k_2}{s+2}+\frac{k_3}{s+3}, \tag{7.127}$$

sa koeficijentima:

$$k_1=\lim_{s\to-1}(s+1)\frac{s+4}{(s+1)(s+2)(s+3)}=\lim_{s\to-1}\frac{s+4}{(s+2)(s+3)}=\frac{3}{2}, \tag{7.128}$$

$$k_2=\lim_{s\to-2}(s+2)\frac{s+4}{(s+1)(s+2)(s+3)}=\lim_{s\to-2}\frac{s+4}{(s+1)(s+3)}=-2, \tag{7.129}$$

$$k_3=\lim_{s\to-3}(s+3)\frac{s+4}{(s+1)(s+2)(s+3)}=\lim_{s\to-2}\frac{s+4}{(s+1)(s+2)}=\frac{1}{2}. \tag{7.130}$$

Dakle,

$$X(s)=\frac{3}{2}\frac{1}{s+1}-2\frac{1}{s+2}+\frac{1}{2}\frac{1}{s+3}. \tag{7.131}$$

Članovi u razvoju su tablične transformacije oblika:

$$e^{p_1 t}u(t)\leftrightarrow\frac{1}{s-p_1}, \tag{7.132}$$

pa iz (7.131) dobijamo:

$$x(t)=\left(\frac{3}{2}e^{-t}-2e^{-2t}+\frac{1}{2}e^{-3t}\right)u(t). \tag{7.133}$$

□

Primjer 7.4:

Odrediti vremenski oblik kauzalnog signala čija je Laplasova transformacija $X(s)=\dfrac{1}{(s+1)^3(s+2)}$.

Rješenje:

Zadata Laplasova transformacija je striktno racionalna funkcija, sa polinomom u nazivniku četvrtog reda. $X(s)$ ima pol trećeg reda $p_1=-1$ i jednostruki pol $p_4=-2$. Inverznom Laplasovom transformacijom trebamo dobiti kauzalan signal, te za oblast konvergencije biramo da bude $\mathrm{Re}\{s\}>-1$. Razvojem funkcije $X(s)$ na parcijalne razlomke dobijamo:

$$X(s)=\sum_{i=1}^{3}\frac{k_i}{(s-p_1)^{3-i+1}}+\frac{k_4}{s-p_4}=\frac{k_1}{(s-p_1)^3}+\frac{k_2}{(s-p_1)^2}+\frac{k_3}{s-p_1}+\frac{k_4}{s-p_4}, \tag{7.134}$$

sa koeficijentima:

$$k_1=\lim_{s\to-1}(s+1)^3\frac{1}{(s+1)^3(s+2)}=\lim_{s\to-1}\frac{1}{(s+2)}=1, \tag{7.135}$$

$$k_2=\lim_{s\to-1}\frac{d}{ds}\left[(s+1)^3\frac{1}{(s+1)^3(s+2)}\right]=\lim_{s\to-1}\frac{d}{ds}\left[\frac{1}{s+2}\right]=\lim_{s\to-1}\left[\frac{-1}{(s+2)^2}\right]=-1, \tag{7.136}$$

$$k_3 = \frac{1}{2!}\lim_{s\to-1}\frac{d^2}{ds^2}\left[(s+1)^3\frac{1}{(s+1)^3(s+2)}\right] = \frac{1}{2}\lim_{s\to-1}\frac{d^2}{ds^2}\left[\frac{1}{s+2}\right] =$$
$$= \frac{1}{2}\lim_{s\to-1}\frac{d}{ds}\left[\frac{-1}{(s+2)^2}\right] = \frac{1}{2}\lim_{s\to-1}\frac{d}{ds}\left[\frac{2(s+2)}{(s+2)^4}\right] = \frac{1}{2}\lim_{s\to-1}\frac{d}{ds}\left[\frac{2}{(s+2)^3}\right] = 1, \tag{7.137}$$

$$k_4 = \lim_{s\to-2}(s+2)\frac{1}{(s+1)^3(s+2)} = \lim_{s\to-2}\frac{1}{(s+1)^3} = -1. \tag{7.138}$$

Na osnovu (7.126), iz:

$$X(s) = \frac{1}{(s+1)^3} - \frac{1}{(s+1)^2} + \frac{1}{s+1} - \frac{1}{s+2} \tag{7.139}$$

dobijamo vremenski oblik signala:

$$x(t) = \left[\sum_{i=1}^{3} k_i \frac{t^{3-i}}{(3-i)!}e^{p_1 t} + k_4 e^{p_4 t}\right]u(t) = \left(\frac{t^2}{2}e^{-t} - te^{-t} + e^{-t} - e^{-2t}\right)u(t). \tag{7.140}$$

□

Primjer 7.5:

Odrediti vremenski oblik signala čija je Laplasova transformacija $X(s) = \frac{s^2+3}{s(s^2+2s+3)}$. Pretpostaviti da je signal kauzalan.

Rješenje:

Funkcija $X(s)$ je striktno racionalna funkcija sa jednostrukim polom $p_1 = 0$ i parom jednostrukih konjugovano kompleksnih polova $p_2 = -1 + j\sqrt{2}$, $p_3 = p_2^* = -1 - j\sqrt{2}$. Oblast konvergencije ove Laplasove transformacije $\mathrm{Re}\{s\} > 0$, jer se radi o Laplasovoj transformaciji kauzalnog signala. Razvojem funkcije $X(s)$ na parcijalne razlomke dobijamo:

$$\begin{aligned} X(s) &= \frac{s^2+3}{s\left(s^2+2s+3\right)} = \frac{s^2+3}{s\left(s+1-j\sqrt{2}\right)\left(s+1+j\sqrt{2}\right)} = \\ &= \frac{k_1}{s} + \frac{k_2}{s+1-j\sqrt{2}} + \frac{k_3}{s+1+j\sqrt{2}}. \end{aligned} \tag{7.141}$$

Koeficijente k_1 i k_2 odredimo na uobičajeni način:

$$k_1 = \lim_{s\to 0} s\frac{s^2+3}{s\left(s^2+2s+3\right)} = \lim_{s\to 0}\frac{s^2+3}{\left(s^2+2s+3\right)} = 1, \tag{7.142}$$

$$\begin{aligned} k_2 &= \lim_{s\to -1+j\sqrt{2}}\left(s+1-j\sqrt{2}\right)\frac{s^2+3}{s\left(s+1-j\sqrt{2}\right)\left(s+1+j\sqrt{2}\right)} = \\ &= \lim_{s\to -1+j\sqrt{2}}\frac{s^2+3}{s\left(s+1-j\sqrt{2}\right)} = \frac{\left(-1+j\sqrt{2}\right)^2+3}{\left(1-j\sqrt{2}\right)\left(j2\sqrt{2}\right)} = j\frac{\sqrt{2}}{2}. \end{aligned} \tag{7.143}$$

Ako je Laplasova transformacija realna racionalna funkcija sa kompleksnim nulama i/ili polovima, te nule i/ili polovi moraju da se pojavljuju u konjugovano kompleksnim parovima, jer bi u suprotnom koeficijenti polinoma u brojniku i/ili nazivniku $X(s)$ bili kompleksni. Zbog toga, za par konjugovano kompleksnih polova $p_2 = \alpha + j\beta$ i $p_3 = p_2^* = \alpha - j\beta$, ako uvedemo oznaku $k_2 = a + jb$, vrijedi da je $k_3 = k_2^* = a - jb$, $|k_3| = |k_3| = \sqrt{a^2+b^2}$ i $\arg k_2 = -\arg k_3 = \arctan\frac{b}{a}$. Izraz za inverznu Laplasovu transformaciju će se pojednostaviti ako se članovi u razvoju $X(s)$ koji odgovaraju konjugovano kompleksnim polovima grupišu na sljedeći način:

$$\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{k_2}{s-p_2} + \frac{k_2^*}{s-p_2^*}\right\} = \left(k_2 e^{p_2 t} + k_2^* e^{p_2^* t}\right)u(t). \tag{7.144}$$

Zbir kompleksnog i njemu konjugovano kompleksnog broja jednak je njegovoj dvostrukoj realnoj vrijednosti, te je:

$$\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{k_2}{s-p_2}+\frac{k_2^*}{s-p_2^*}\right\}=2\,\mathrm{Re}\left\{k_2 e^{p_2 t}\right\}u(t)=2\,\mathrm{Re}\left\{\left|k_2\right|e^{j\arg k_2}e^{\alpha t}e^{j\beta t}\right\}u(t)=$$
$$=2\left|k_2\right|e^{\alpha t}\,\mathrm{Re}\left\{e^{j(\beta t+\arg k_2)}\right\}u(t)= \tag{7.145}$$
$$=2\left|k_2\right|e^{\alpha t}\cos\left(\beta t+\arg k_2\right)u(t).$$

Tražena inverzna Laplasova transformacija je jednaka:

$$x(t)=\left[1+\sqrt{2}e^{-t}\cos\left(\sqrt{2}t+\frac{\pi}{2}\right)\right]u(t). \tag{7.146}$$

Rezultat (7.146) smo, umjesto na ovaj način, nakon određivanja k_2 i grupisanja:

$$\frac{k_2}{s-p_2}+\frac{k_2^*}{s-p_2^*}=j\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\frac{1}{s+1-j\sqrt{2}}-\frac{1}{s+1+j\sqrt{2}}\right)=-\sqrt{2}\frac{\sqrt{2}}{(s+1)^2+2}, \tag{7.147}$$

mogli dobiti iz tabličnog transformacionog para za sinusnu funkciju, na osnovu koga je:

$$\mathscr{L}^{-1}\left\{-\frac{\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}}{(s+1)^2+2}\right\}=-\sqrt{2}e^{-t}\sin\sqrt{2}t\cdot u(t). \tag{7.148}$$

□

7.7 Primjena Laplasove transformacije u analizi sistema i obradi signala

U Glavi 4 smo vidjeli da se LTI sistemi opisuju diferencijalnim jednačinama čiji je opšti oblik:

$$\sum_{k=0}^{n} a_k \frac{d^k y(t)}{dt^k} = \sum_{k=0}^{m} b_k \frac{d^k x(t)}{dt^k}, \quad a_n = 1\,, \tag{7.149}$$

gdje su a_i, $i = 1,2,\ldots,n-1$ i b_j, $j = 1,2,\ldots,m$ realne konstante koje zavise od elemenata sistema i njihovih međusobnih veza, $x(t)$ pobuda, a $y(t)$ odziv sistema. U razvijenom obliku ova diferencijalna jednačina ima oblik:

$$\frac{d^n y}{dt^n} + a_{n-1}\frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}} + \cdots + a_0 y = b_m \frac{d^m x}{dt^m} + b_{m-1}\frac{d^{m-1} x}{dt^{m-1}} + \cdots + b_0 x\,. \tag{7.150}$$

Odziv LTI sistema na pobudu $x(t)$ je moguće odrediti rješavanjem diferencijalne jednačine (7.149), a ukoliko je poznat impulsni odziv $h(t)$ kontinualnog LTI sistema, odziv na proizvoljnu pobudu se može dobiti konvolucijom pobudnog signala i impulsnog odziva:

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t-\tau)\,d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)x(t-\tau)\,d\tau = x(t)*h(t) = h(t)*x(t)\,. \tag{7.151}$$

7.7.1 Određivanje odziva primjenom pravila konvolucije u vremenskom domenu

Na osnovu odziva linearnog, vremenski invarijantnog sistema na pobudu kompleksnim eksponencijalnim signalom:

$$x(t) = e^{st} \tag{7.152}$$

koji je jednak:

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)x(t-\tau)\,d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)e^{s(t-\tau)}\,d\tau = \left[\int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)e^{-s\tau}\,d\tau\right]e^{st}, \tag{7.153}$$

u Glavi 4 smo definisali funkciju prenosa sistema sa:

$$H(s) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) e^{-s\tau} d\tau . \tag{7.154}$$

Iz (7.154) vidimo da je funkcija prenosa jednaka Laplasovoj transformaciji njegovog impulsnog odziva. Koristeći osobinu konvolucije u vremenskom domenu, koja podjednako vrijedi kako za unilateralnu, tako i za bilateralnu Laplasovu transformaciju, ako znamo funkciju prenosa $H(s)$, možemo odrediti odziv $y(t)$ na proizvoljnu pobudu $x(t)$ koja ima Laplasovu transformaciju $X(s)$:

$$Y(s) = H(s) X(s) \tag{7.155}$$

$$y(t) = \mathscr{L}^{-1}\{Y(s)\} = \mathscr{L}^{-1}\{H(s) X(s)\} . \tag{7.156}$$

Napomenimo da se konvolucijom dobija odziv na pobudu pri nultim početnim uslovima. Stoga i ovaj metod daje odziv na proizvoljnu pobudu pri nultim početnim uslovima.

Iako se može smatrati da su početni uslovi u $-\infty$ poznati i jednaki nuli, bilateralnu Laplasovu transformaciju nije pogodno koristiti za traženje odziva jer ona podrazumijeva poznavanje signala od $-\infty$ do ∞. Međutim, u praksi su najčešće poznati početno stanje sistema, koje je određeno akumulisanom energijom zatečenom u trenutku $t = 0_-$ i pobuda za $t \geq 0$, što znači da bilateralne transformacije nisu pogodne za određivanje odziva. Ideja o korišćenju unilateralne Laplasove transformacije za traženje odziva zasniva se na pretpostavci da je LTI sistem kauzalan. Korišćenjem unilateralne Laplasove transformacije sa donjom granicom integrala u 0_- obuhvatamo i sve promjene u sistemu koje se dešavaju u trenutku dovođenja pobude.

Odziv kauzalnog LTI sistema je dat sa:

$$y(t) = \int_{0_-}^{\infty} h(\tau) x(t-\tau) d\tau . \tag{7.157}$$

Uz pretpostavku da je i pobuda kauzalna i data u vidu kompleksne eksponencijalne funkcije:

$$x(t) = e^{st}u(t), \tag{7.158}$$

odziv sistema je jednak:

$$y(t) = \int_{0_-}^{t} h(\tau)e^{s(t-\tau)}d\tau = \left[\int_{0_-}^{t} h(\tau)e^{-s\tau}d\tau\right]e^{st}. \tag{7.159}$$

Budući da je gornja granica integrala u zagradi t, izraz u uglastim zagradama je funkcija vremena, te odziv nije neminovno istog oblika kao pobuda, za razliku od pobude nekauzalnom sopstvenom funkcijom sistema e^{st} (vidi Poglavlje 4.6.1). Međutim, za sisteme kod kojih je impulsni odziv takav da se proizvod $h(\tau)e^{-s\tau}$ pod integralom u (7.159) smanjuje pri porastu vremenske varijable τ, izvjesno je da će podintegralna funkcija nakon dovoljno dugo vremena biti jednaka nuli, te se može smatrati da integral nakon dovoljno dugo vremena približno dostiže svoju konačnu vrijednost koja ne zavisi od gornje granice t. Dakle, nakon dovoljno dugo vremena možemo izjednačiti integrale:

$$\int_{0_-}^{t} h(\tau)e^{-s\tau}d\tau \approx \int_{0_-}^{\infty} h(\tau)e^{-s\tau}d\tau. \tag{7.160}$$

Tada odziv poprima isti oblik kao pobuda i kažemo da je nastupilo ustaljeno stanje:

$$y(t) \approx \left[\int_{0_-}^{\infty} h(\tau)e^{-s\tau}d\tau\right]e^{st} = H(s)e^{st}. \tag{7.161}$$

Interval vremena prije nastupanja ustaljenog stanja je označen kao prelazni proces.

Od ranije znamo da je odziv na pobudu jednak zbiru sopstvenog i prinudnog odziva, te da nakon dovoljno dugo vremena sopstveni odziv iščezava i odziv postaje jednak prinudnoj komponenti odziva, odnosno odzivu u ustaljenom stanju. Pri kauzalnoj kompleksnoj eksponencijalnoj pobudi je odziv u ustaljenom stanju jednak:

$$y(t) \approx y_p(t) = H(s)e^{st}. \tag{7.162}$$

Stoga se funkcija prenosa često definiše kao količnik prinudnog odziva na kompleksnu eksponencijalnu pobudu i same te pobude:

$$H(s) = \frac{prinudni\ odziv\ na\ e^{st}}{e^{st}}. \tag{7.163}$$

Za kauzalne sisteme unilateralna Laplasova transformacija jediničnog impulsnog odziva jednaka je njegovoj bilateralnoj Laplasovoj transformaciji datoj sa (7.154), odnosno *funkciji prenosa* $H(s)$:

$$h(t) \leftrightarrow H(s). \tag{7.164}$$

Jedinični odskočni odziv $a(t)$ je definisan kao količnik odziva na Hevisajdovu funkciju $o_u(t)$ i skoka Hevisajdove funkcije U_0. Označimo sa $A(s)$ Laplasovu transformaciju jediničnog odskočnog odziva:

$$A(s) = \mathscr{L}\{a(t)\} = \mathscr{L}\left\{\frac{o_u(t)}{U_0}\right\} = \frac{O_u(s)}{U_0}, \tag{7.165}$$

gdje je $O_u(s) = \mathscr{L}\{o_u(t)\}$.

Na osnovu osobine konvolucije Laplasove ransformacije, funkcija prenosa se može izraziti kao količnik Laplasove transformacije odziva i Laplasove transformacije pobude:

$$H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)}. \tag{7.166}$$

Budući da ova veza vrijedi pri bilo kakvom obliku pobude, pretpostavljajući da je pobuda Hevisajdova funkcija, lako određujemo vezu funkcije prenosa sa Laplasovom transformacijom jediničnog odskočnog odziva:

$$H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{\mathscr{L}\{o_u(t)\}}{\mathscr{L}\{U_0 \cdot u(t)\}} = \frac{\mathscr{L}\{o_u(t)\}}{U_0 \frac{1}{s}} = s\frac{\mathscr{L}\{o_u(t)\}}{U_0} = sA(s). \tag{7.167}$$

7.7.2 Frekvencijske karakteristike

U Glavi 4 smo vidjeli da, ukoliko linearni vremenski invarijantan sistem pobudimo prostoperiodičnom eksponencijalnom funkcijom:

$$x(t) = e^{j\Omega t}, \tag{7.168}$$

odziv postaje jednak:

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)x(t-\tau)d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)e^{j\Omega(t-\tau)}d\tau = \left[\int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)e^{-j\Omega\tau}d\tau\right]e^{j\Omega t}. \tag{7.169}$$

Sada znamo da je izraz koji smo definisali kao frekvencijsku karakteristiku sistema:

$$H(\Omega) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)e^{-j\Omega\tau}d\tau, \tag{7.170}$$

jednak Furijeovoj transformaciji impulsnog odziva. Ponovimo da amplitudna karakteristika $|H(\Omega)|$ ukazuje na to kako će sistem modifikovati amplitudu prostoperiodičnih signala različitih učestanosti, dok nam fazna karakteristika $\arg H(\Omega)$ govori o tome kako će signal na izlazu biti fazno pomjeren u odnosu na ulazni signal.

Apsolutna integrabilnost je dovoljan uslov za egzistenciju Furijeove transformacije impulsnog odziva. Ukoliko imaginarna osa pripada oblasti konvergencije, tada je iz Laplasove transformacije moguće dobiti Furijeovu transformaciju impulsnog odziva jednostavnom smjenom $s = j\Omega$:

$$H(\Omega) = H(s)\big|_{s=j\Omega}. \tag{7.171}$$

Iako smo vezu Laplasove i Furijeove transformacije (7.171) uspostavili za impulsni odziv, jednako vrijedi i za Laplasove i Furijeove transformacije drugih signala čija Laplasova transformacija konvergira na imaginarnoj osi.

7.7.3 Uslovi stabilnosti LTI sistema

Uslov stabilnosti LTI sistema je, kako smo vidjeli u Glavi 4, apsolutna integrabilnost njegovog impulsnog odziva:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left|h(t)\right| dt < \infty . \tag{7.172}$$

To je, istovremeno, Dirihleov uslov za egzistenciju Furijeove transformacije impulsnog odziva. S druge strane, Furijeova transformacija impulsnog odziva je, na osnovu (7.171) jednaka njegovoj Laplasovoj transformaciji na imaginarnoj osi s ravni, ukoliko se ona nalazi u oblasti konvergencije. Prema tome, sistem je stabilan ako egzistira Furijeova transformacija njegovog impulsnog odziva. Posmatrano u domenu kompleksne učestanosti s, sistem je stabilan ako imaginarna osa pripada oblasti konvergencije njegove funkcije prenosa. Svi polovi funkcije prenosa stabilnih kauzalnih sistema se nalaze u lijevoj, a antikauzalnih u desnoj poluravni kompleksne s ravni.

7.7.4 Određivanje odziva rješavanjem diferencijalnih jednačina primjenom unilateralne Laplasove transformacije

Kako bismo analizirali mogućnost primjene unilateralne Laplasove transformacije za određivanje odziva u LTI sistemima, pođimo od diferencijalne jednačine n-tog reda sa konstantnim koeficijentima koja opisuje sistem sa jednim ulazom i jednim izlazom:

$$\frac{d^n y(t)}{dt^n} + \cdots + a_1 \frac{dy(t)}{dt} + a_0 y(t) = b_m \frac{d^m x(t)}{dt^m} + \cdots + b_1 \frac{dx(t)}{dt} + b_0 x(t) \tag{7.173}$$

i koja se može zapisati u sažetom obliku kao:

$$\sum_{k=0}^{n} a_k \frac{d^k y(t)}{dt^k} = \sum_{k=0}^{m} b_k \frac{d^k x(t)}{dt^k}, \ a_n = 1 . \tag{7.174}$$

Pri rješavanju diferencijalne jednačine neophodno je poznavati početne uslove, tj. vrijednosti pobude, odziva i njihovih izvoda u nekom trenutku vremena t_0:

$$x(t_0), \frac{dx(t_0)}{dt}, \ldots, \frac{d^{m-1}x(t_0)}{dt^{n-1}};\ y(t_0), \frac{dy(t_0)}{dt}, \ldots, \frac{d^{n-1}y(t_0)}{dt^{n-1}}, \tag{7.175}$$

najčešće u trenutku $t_0 = 0_-$.

Nakon primjene unilateralne Laplasove transformacije na ovu diferencijalnu jednačinu, vodeći računa o pravilu koje slijedi iz osobina Laplasove transformacije izvoda signala:

$$\mathscr{L}\left\{\frac{d^k x(t)}{dt^k}\right\} = s^k X(s) - s^{k-1}x(0_-) - \cdots - s\frac{d^{k-2}x}{dt^{k-2}}(0_-) - \frac{d^{k-1}x}{dt^{k-1}}x(0_-), \tag{7.176}$$

dobijamo:

$$Y(s)\left(s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \cdots + a_1 s + a_0\right) = X(s)\left(b_m s^m + \cdots + b_1 s + b_0\right) + IC(s), \tag{7.177}$$

gdje su u $IC(s)$ grupisani svi članovi koji uključuju početne uslove za signale $y(t)$ i $x(t)$. Karakteristika sistema ne smije da zavisi od trenutno zatečenog stanja sistema izraženog kroz početne uslove, te se pri određivanju funkcije prenosa svi početni uslovi postavljaju na nulu.

Prema tome, funkcija prenosa:

$$H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{b_m s^m + b_{m-1}s^{m-1} + \cdots + b_0}{s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \cdots + a_0} = \frac{N(s)}{D(s)} \tag{7.178}$$

je količnik dva polinoma po s sa realnim koeficijentima, tzv. *realna racionalna funkcija*. Primjetimo da je $D(s) = 0$ karakteristična jednačina sistema, te se polinom $D(s)$ naziva *karakteristični polinom*.

Ukoliko želimo da odredimo kompletan odziv kao zbir odziva na akumulisanu energiju i pobudu, potrebno je pronaći inverznu Laplasovu transformaciju izraza:

$$Y(s) = H(s)X(s) + \frac{1}{D(s)}IC(s). \tag{7.179}$$

Budući da koristimo unilateralnu Laplasovu transformaciju, nakon vraćanja u vremenski domen zadržavamo samo dio za $t \geq 0$.

Odziv na eksitaciju pri nultim početnim uslovima

Već smo vidjeli da prvi član $H(s)X(s)$ predstavlja Laplasovu transformaciju odziva na pobudu pri nultim početnim uslovima, te je drugi član $\frac{1}{D(s)}IC(s)$ Laplasova transformacija odziva na akumulisanu energiju.

Ograničimo se na posmatranje široke klase pobudnih signala čije su Laplasove transformacije realne racionalne funkcije $X(s)=\frac{N_X(s)}{D_X(s)}$. Sada se polinomi u brojniku i nazivniku Laplasove transformacije odziva na pobudu pri nultim početnim uslovima mogu faktorizovati na sljedeći način:

$$Y(s)=\frac{N(s)}{D(s)}\cdot\frac{N_X(s)}{D_X(s)}, \tag{7.180}$$

$$Y(s)=K\frac{(s-z_1)(s-z_2)\ldots(s-z_m)}{(s-p_1)(s-p_2)\ldots(s-p_n)}\cdot\frac{(s-v_1)(s-v_2)\ldots(s-v_{m_X})}{(s-q_1)(s-q_2)\ldots(s-q_{n_X})}. \tag{7.181}$$

Pri tome smo sa $z_i,\ i=1,2,\ldots,m$ i $p_i,\ i=1,2,\ldots,n$ označili nule i polove funkcije prenosa, respektivno. Sa $v_i,\ i=1,2,\ldots,m_X$ i $q_i,\ i=1,2,\ldots,n_X$ su respektivno označeni korijeni polinoma u brojniku i nazivniku Laplasove transformacije pobude $X(s)$. Ograničićemo se na razmatranje slučajeva kada ne dolazi do poništavanja nula i polova funkcije prenosa sa polovima i nulama Laplasove transformacije pobude, respektivno.

Posmatrajmo razvoj funkcije:

$$Y(s)=\frac{N(s)N_X(s)}{D(s)D_X(s)}=\sum_{i=0}^{Q}c_is^i+\frac{N_R(s)}{D(s)D_X(s)},\ \ Q=(m+m_x)-(n+n_x) \tag{7.182}$$

na parcijalne razlomke. Napomenimo da je kod fizički realizibilnih sistema $n\geq m$, gdje je n red sistema.

U slučaju kada su svi polovi $Y(s)$ prosti, (7.182) postaje:

$$Y(s)=\sum_{i=0}^{Q}c_i s^i+\sum_{i=1}^{n}\frac{k_i}{s-p_i}+\sum_{i=1}^{n_X}\frac{l_i}{s-q_i}\,, \tag{7.183}$$

sa koeficijentima:

$$k_i=\lim_{s\to p_i}(s-p_i)\frac{N_R(s)}{D(s)D_X(s)}=\frac{N_R(p_i)}{D_Y'(p_i)},\ i=1,2,\ldots,n\,, \tag{7.184}$$

$$l_i=\lim_{s\to q_i}(s-q_i)\frac{N_R(s)}{D(s)D_X(s)}=\frac{N_R(q_i)}{D_Y'(q_i)},\ i=1,2,\ldots,n_X\,, \tag{7.185}$$

gdje smo koristili oznaku $D_Y(s)=D(s)D_X(s)$. Sada je:

$$Y(s)=\sum_{i=0}^{Q}c_i s^i+\sum_{i=1}^{n}\frac{N_R(p_i)}{D_Y'(p_i)}\frac{1}{s-p_i}+\sum_{i=1}^{n_X}\frac{N_R(q_i)}{D_Y'(q_i)}\frac{1}{s-q_i}\,. \tag{7.186}$$

Inverznom Laplasovom transformacijom dobijamo odziv kauzalnog sistema:

$$y(t)=\sum_{i=0}^{Q}c_i\delta^{(i)}(t)+\left[\sum_{i=1}^{n}k_i e^{p_i t}+\sum_{i=1}^{n_X}l_i e^{q_i t}\right]u(t)\,, \tag{7.187}$$

odnosno:

$$y(t)=\sum_{i=0}^{Q}c_i\delta^{(i)}(t)+\left[\sum_{i=1}^{n}\frac{N_R(p_i)}{D_Y'(p_i)}e^{p_i t}+\sum_{i=1}^{n_X}\frac{N_R(q_i)}{D_Y'(q_i)}e^{q_i t}\right]u(t)\,. \tag{7.188}$$

U slučaju višestrukih polova, na primjer kada $Y(s)$ ima jedan višestruki pol p_1 reda r, tj. $p_1=p_2=\cdots=p_r$, razvojem na parcijalne razlomke dobijamo:

$$Y(s)=\sum_{i=0}^{Q}c_i s^i+\sum_{i=1}^{r}\frac{k_i}{(s-p_1)^{r-i+1}}+\sum_{i=r+1}^{n}\frac{k_i}{s-p_i}+\sum_{i=1}^{n_X}\frac{l_i}{s-q_i}\,, \tag{7.189}$$

sa koeficijentima:

$$k_i=\frac{1}{(i-1)!}\lim_{s\to p_1}\frac{d^{i-1}}{ds^{i-1}}\left[(s-p_1)^r\frac{N_R(s)}{D(s)D_X(s)}\right],\ i=1,2,\ldots,r\,, \tag{7.190}$$

$$k_i = \lim_{s \to p_i} (s - p_i) \frac{N_R(s)}{D(s) D_X(s)}, \; i = r+1, \ldots, n, \tag{7.191}$$

$$l_i = \lim_{s \to q_i} (s - q_i) \frac{N_R(s)}{D(s) D_X(s)}, \; i = 1, 2, \ldots, n_X. \tag{7.192}$$

Odziv je u ovom slučaju jednak:

$$y(t) = \sum_{i=0}^{Q} \alpha_i \delta^{(i)}(t) + \left[\sum_{i=1}^{r} k_i \frac{t^{r-i}}{(r-i)!} e^{p_1 t} + \sum_{i=r+1}^{n} k_i e^{p_i t} + \sum_{i=1}^{n_X} l_i e^{q_i t} \right] u(t). \tag{7.193}$$

Ukoliko $Y(s)$ ima više višestrukih polova, za svaki od njih se formira po jedna suma na sličan način kao što je rađeno za višestruki pol p_1.

Sopstveni i prinudni odziv

Već smo pomenuli da je Laplasova transformacija kompletnog odziva data u obliku zbira:

$$Y(s) = H(s) X(s) + \frac{1}{D(s)} IC(s), \tag{7.194}$$

gdje prvi član

$$Y_e(s) = H(s) X(s) = \frac{N(s)}{D(s)} X(s) \tag{7.195}$$

predstavlja Laplasovu transformaciju odziva na pobudu pri nultim početnim uslovima.

Primijetimo da su polovi funkcije prenosa p_i, $i = 1, 2, \ldots, n$ nule polinoma $D(s)$:

$$D(s) = s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \cdots + a_0, \tag{7.196}$$

istovremeno korijeni karaketristične jednačine, koja se dobije kada se u homogeni dio diferencijalne jednačine:

$$\sum_{k=0}^{n} a_k \frac{d^k y(t)}{dt^k} = 0, \; a_n = 1 \tag{7.197}$$

uvrsti pretpostavljeno rješenje oblika e^{st}:

$$s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \cdots + a_0 = 0. \tag{7.198}$$

Pod pretpostavkom da su svi korijeni karakteristične jednačine $p_i,\ i = 1,2,\ldots,n$ jednostruki, sopstveno rješenje koje se dobije rješavanjem homogene diferencijalne jednačine je:

$$y_s(t) = \sum_{i=1}^{n} K_i e^{p_i t},\ t \geq 0, \tag{7.199}$$

gdje su K_i konstane koje zavise od početnih uslova.

Poređenjem sa izrazom za odziv na pobudu pri nultim početnim uslovima i jednostrukim polovima funkcije prenosa, koji smo dobili primjenom Laplasove transformacije (7.187):

$$y(t) = \sum_{i=0}^{Q} \alpha_i \delta^{(i)}(t) + \left[\sum_{i=1}^{n} k_i e^{p_i t} + \sum_{i=1}^{n_X} l_i e^{q_i t}\right] u(t), \tag{7.200}$$

vidimo da je sopstveno rješenje sadržano u ovom izrazu, te da je generisano polovima funkcije prenosa. Pri tome je $k_i = K_i$. Preostali dio odziva predstavlja prinudni odziv, odnosno ustaljeno stanje.

Slično razmatranje se može provesti i u slučajevima kada se javljaju višestruki polovi.

Budući da su koeficijenti funkcije prenosa $H(s)$ realni, njene nule i polovi dolaze u konjugovano-kompleksnim parovima. Zavisno od rasporeda polova u kompleksnoj ravni, mogu nastupiti različiti oblici sopstvenog odziva. Ako su polovi jednostruki, vrijedi sljedeće:

1. svi polovi se nalaze u lijevoj poluravni – sopstveni odziv eksponencijalno pada s porastom vremena,
2. pojavljuje se konjugovano-kompleksni par polova na imaginarnoj osi – u sopstvenom odzivu se javljaju periodične oscilacije,
3. postoje polovi u desnoj poluravni – sopstveni odziv eksponencijalno raste s porastom vremena.

Odziv na akumulisanu energiju

U izrazu za Laplasovu transformacija kompletnog odziva:

$$Y(s) = H(s)X(s) + \frac{1}{D(s)}IC(s), \tag{7.201}$$

član $\dfrac{IC(s)}{D(s)}$ je Laplasova transformacija odziva na akumulisanu energiju. Polovi ove racionalne funkcije su jednaki polovima funkcije prenosa, te je zbog toga sopstveni odziv na akumulisanu energiju istog oblika kao sopstveni odziv na pobudu. Prilikom traženja odziva ovaj član nije potrebno posebno izdvajati, već se kompletan odziv određuje inverznom Laplasovom transformacijom izraza (7.201).

7.7.5 Analiza električnih kola primjenom Laplasove transformacije

Uvođenjem kompleksnih predstavnika za napone i struje u domenu Laplasove transformacije, diferencijalna jednačina koja opisuje električno kolo u vremenskom domenu se prevodi u domen kompleksnih učestanosti. Na osnovu osobine linearnosti, Kirhofovi zakoni za struje i napone imaju istu formu u vremenskom i u domenu Laplasove transformacije. Za slučaj da kolo sadrži samo elemente sa jednim pristupom, možemo pisati:

$$\sum_{l=1}^{b} a_{kl} i_l(t) = 0 \leftrightarrow \sum_{l=1}^{b} a_{kl} I_l(s) = 0,\ k = 1,2,\ldots,n = c-1, \tag{7.202}$$

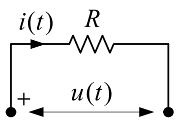
$$\sum_{l=1}^{g} b_{kl} u_l(t) = 0 \leftrightarrow \sum_{l=1}^{g} b_{kl} U_l(s) = 0,\ k = 1,2,\ldots,m = g-c. \tag{7.203}$$

Neka je ukupan broj grana električnog kola označen sa g, a ukupan broj čvorova sa c. Koeficijent a_{kl} poprima vrijednost 1 ili -1 ovisno o tome da li se smjer l-te grane poklapa ili ne poklapa sa orijentacijom k-tog čvora, a 0 ako l-ta grana nije vezana za k-ti čvor. Slično, koeficijent b_{kl} poprima vrijednost 1 ili -1 ovisno o tome da li se smjer l-te grane poklapa sa smjerom k-te konture, a 0 ako kontura ne obuhvata odgovarajuću granu. Ove jednačine se mogu direktno pisati u domenu Laplasove transformacije. Slično vrijedi i za ostale poznate metode rješavanja električnih kola. Pri analizi električnih kola, osim zakonitosti koje opisuju način povezivanja, potrebno je poznavati i veze između napona i struja na samim elementima kola. U nastavku je dat prikaz osnovnih elemenata električnih kola u domenu Laplasove transformacije.

Otpornik

Napon i struja na krajevima otpornika prikazanog na Slici 7.11 vezani su sljedećom relacijom:

$$u(t) = Ri(t) \leftrightarrow U(s) = RI(s). \tag{7.204}$$



Slika 7.11 Otpornik.

Funkcija prenosa otpornika može se definisati kao impedansa:

$$Z_R(s) = \frac{U(s)}{I(s)} = R, \tag{7.205}$$

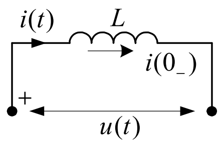
ili admitansa:

$$Y_R(s) = \frac{I(s)}{U(s)} = \frac{1}{R}. \tag{7.206}$$

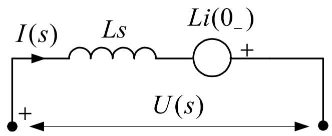
Kalem

Napon kalema prikazanog na Slici 7.12 je:

$$u(t) = L\frac{di(t)}{dt} \leftrightarrow U(s) = LsI(s) - Li(0_-). \tag{7.207}$$



Slika 7.12 Kalem.



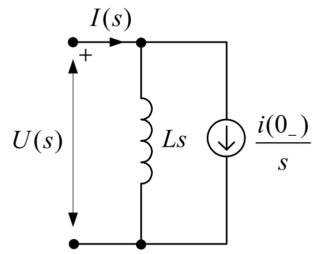
Slika 7.13 Ekvivalentna šema kalema sa akumulisanom energijom uz korišćenje naponskog generatora.

Posmatrajući (7.207) zaključujemo da kalem sa akumulisanom energijom u domenu Laplasove transformacije možemo predstaviti kao rednu vezu kalema bez akumulisane energije i ekvivalentnog naponskog generatora $Li(0_-)$, kao na Slici 7.13.

Izražavajući iz (7.207) struju u domenu Laplasove transformacije:

$$I(s) = \frac{U(s)}{Ls} + \frac{i(0_-)}{s}, \tag{7.208}$$

zaključujemo da ekvivalentna šema za kalem sa akumulisanom energijom u domenu Laplasove transformacije može da bude i paralelna veza kalema bez akumulisane energije i ekvivalentnog strujnog generatora, kao na Slici 7.14.



Slika 7.14 Ekvivalentna šema kalema sa akumulisanom energijom uz korišćenje strujnog generatora.

Funkcije prenosa kalema se određuju pri nultim početnim uslovima. Impedansa kalema je:

$$Z_L(s) = \frac{U(s)}{I(s)} = Ls\,, \tag{7.209}$$

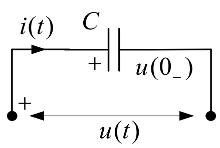
dok admitansa ima oblik:

$$Y_L(s) = \frac{I(s)}{U(s)} = \frac{1}{Ls}\,. \tag{7.210}$$

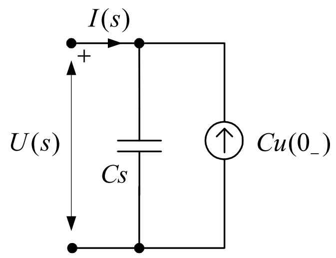
Kondenzator

Struja kondenzatora sa Slike 7.15 je:

$$i(t) = C\frac{du(t)}{dt} \leftrightarrow I(s) = CsU(s) - Cu(0_-)\,. \tag{7.211}$$



Slika 7.15 Kondenzator.



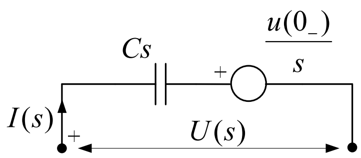
Slika 7.16 Ekvivalentna šema kondenzatora sa akumulisanom energijom uz korišćenje strujnog generatora.

Kondenzator sa akumulisanom energijom u domenu Laplasove transformacije predstavljamo kao paralelnu vezu kondenzatora bez akulmulisane energije i ekvivalentnog strujnog generatora, kao na Slici 7.16.

Ako iz (7.211) izrazimo napon kondenzatora u domenu Laplasove transformacije:

$$U(s)=\frac{I(s)}{Cs}+\frac{u(0_-)}{s}, \tag{7.212}$$

zaključujemo da se kondenzator sa akumulisanom energijom u domenu Laplasove transformacije može predstaviti rednom vezom kondenzatora bez akumulisane energije i ekvivalentnog naponskog generatora, kao na Slici 7.17.



Slika 7.17 Ekvivalentna šema kondenzatora sa akumulisanom energijom uz korišćenje naponskog generatora.

Funkcije prenosa kondenzatora (određene pri nultim početnim uslovima) su impedansa:

$$Z_C(s) = \frac{U(s)}{I(s)} = \frac{1}{Cs} \tag{7.213}$$

i admitansa:

$$Y_C(s) = \frac{I(s)}{U(s)} = Cs\,. \tag{7.214}$$

Za ostale elemente električnih kola relacije u domenu Laplasove transformacije koje povezuju napone i struje na njihovim pristupima se izvode na sličan način.

7.7.6 Jednačine stanja u domenu Laplasove transformacije

Umjesto opisa sistema diferencijalnom jednačinom n-tog reda, sistem jednačina stanja u vremenskom domenu za opis sistema koristi samo prve izvode promjenljivih stanja. U matričnoj formi sistem jednačina stanja u vremenskom domenu ima oblik:

$$D\mathbf{x}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{e}(t)\,, \tag{7.215}$$

gdje su: $\mathbf{x}(t)$ n-dimenionalni vektor promjenljivih stanja, $D\mathbf{x}(t)$ vektor prvih izvoda promjenljivih stanja, $\mathbf{e}(t)$ vektor pobuda, $\mathbf{A}$ kvadratna matrica stanja (ili matrica sistema) i $\mathbf{B}$ pravougaona matrica koeficijenata uz pobude. Izlazne promjenljive sistema su određene matričnom jednačinom:

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}\mathbf{e}(t)\,, \tag{7.216}$$

gdje su $\mathbf{C}$ i $\mathbf{D}$ matrice koje povezuju izlazne promjenljive sa promjenljivim stanja i pobudama.

Primjenjujući Laplasovu transformaciju na ove matrične jednačine dobijamo:

$$s\mathbf{X}(s)-\mathbf{X}_0=\mathbf{AX}(s)+\mathbf{BE}(s), \tag{7.217}$$

$$\mathbf{Y}(s)=\mathbf{CX}(s)+\mathbf{DE}(s). \tag{7.218}$$

Sa $\mathbf{X}_0$ je označen vektor koji sadrži vrijednosti promjenljivih stanja u početnom trenutku posmatranja $t=0_-$.

Rješenje za kompleksne promjenljive stanja dobije se iz (7.217):

$$\mathbf{X}(s)=\left(s\mathbf{I}_n-\mathbf{A}\right)^{-1}\mathbf{X}_0+\left(s\mathbf{I}_n-\mathbf{A}\right)^{-1}\mathbf{BE}(s), \tag{7.219}$$

gdje je $\mathbf{I}_n$ jedinična matrica reda n. Kompleksne izlazne promjenljive su:

$$\begin{aligned}\mathbf{Y}(s)&=\mathbf{C}\left[\left(s\mathbf{I}_n-\mathbf{A}\right)^{-1}\mathbf{X}_0+\left(s\mathbf{I}_n-\mathbf{A}\right)^{-1}\mathbf{BE}(s)\right]+\mathbf{DE}(s)=\\&=\mathbf{C}\left(s\mathbf{I}_n-\mathbf{A}\right)^{-1}\mathbf{X}_0+\left[\mathbf{C}\left(s\mathbf{I}_n-\mathbf{A}\right)^{-1}\mathbf{B}+\mathbf{D}\right]\mathbf{E}(s).\end{aligned} \tag{7.220}$$

Koncept funkcije prenosa koju smo definisali za sisteme sa jednim ulazom i jednim izlazom možemo proširiti i na sisteme sa više ulaza i više izlaza. Pri nultim početnim uslovima, funkciju prenosa određujemo kao količnik Laplasove transformacije odziva i Laplasove transformacije pobude. *Matrična funkcija prenosa* je jednaka:

$$\mathbf{T}(s)=\frac{\mathbf{Y}(s)}{\mathbf{E}(s)}=\mathbf{C}\left(s\mathbf{I}_n-\mathbf{A}\right)^{-1}\mathbf{B}+\mathbf{D}. \tag{7.221}$$

Izlazne promjenljive se pri nultim početnim uslovima sada mogu iskazati jednostavnom matričnom jednačinom:

$$\mathbf{Y}(s)=\mathbf{T}(s)\mathbf{E}(s). \tag{7.222}$$

Primjetimo da sve pojedinačne funkcije prenosa jednog sistema, koje se definišu kao količnik jedne izlazne promjenljive i jedne pobude, imaju isti polinom u nazivniku. To je karakteristični polinom koji smo već pominjali i označavali sa $D(s)$.

7.7.7 Analiza složenih sistema primjenom Laplasove transformacije

Na osnovu analize LTI sistema u vremenskom domenu znamo da je impulsni odziv kaskadne veze dva LTI sistema jednak konvoluciji njihovih impulsnih odziva:

$$h(t) = h_1(t) * h_2(t). \tag{7.223}$$

Budući da konvoluciji u vremenskom domenu odgovara množenje u transformacionom domenu, vrijedi da je funkcija prenosa kaskadne veze dva LTI sistema jednaka proizvodu funkcija prenosa pojedinačnih sistema:

$$H(s) = H_1(s) \cdot H_2(s). \tag{7.224}$$

Funkcija prenosa je jednaka količniku Laplasove transformacije odziva i Laplasove transformacije eksitacije, te do funkcije prenosa kaskadne veze n LTI sistema, prikazane na Slici 7.18, dolazimo jednostavnim zaključivanjem:

$$H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{Y_1(s)}{X(s)} \cdot \frac{Y_2(s)}{Y_1(s)} \cdot \frac{Y_3(s)}{Y_2(s)} \cdots \frac{Y_{n-1}(s)}{Y_{n-2}(s)} \cdot \frac{Y(s)}{Y_{n-1}(s)}, \tag{7.225}$$

$$H(s) = H_1(s) \cdot H_2(s) \cdots H_n(s). \tag{7.226}$$

Kod paralelne veze LTI sistema prikazane na Slici 7.19, isti pobudni signal se istovremeno dovodi na ulaz svih pojedinačnih sistema. Laplasova transformacija izlaznog signala cijelog sistema je jednaka zbiru Laplasovih transformacija izlaznih signala pojedinačnih sistema:

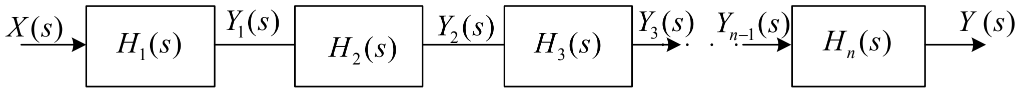
$$Y(s) = Y_1(s) + Y_2(s) + \cdots + Y_n(s). \tag{7.227}$$

Budući da je:

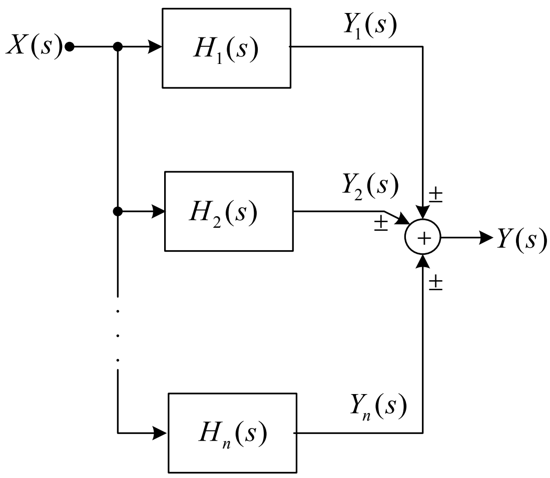
$$Y_i(s) = H_i(s) \cdot X(s),\ i = 1, 2, \ldots, n, \tag{7.228}$$

funkcija prenosa paralelne veze n LTI sistema je:

$$H(s) = H_1(s) + H_2(s) + \cdots + H_n(s). \tag{7.229}$$

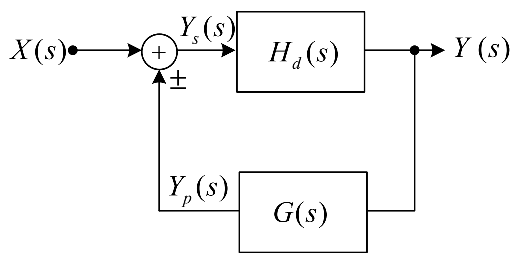


Slika 7.18 Blok šema kaskadne veze n LTI sistema u domenu Laplasove transformacije.



Slika 7.19 Blok šema paralelne veze n LTI sistema u domenu Laplasove transformacije.

Određivanje impulsnog odziva sistema sa povratnom vezom u vremenskom domenu nije jednostavan problem. Posmatrajmo blok šemu sistema sa povratnom vezom datu na Slici 7.20.



Slika 7.20 Blok šema LTI sistema sa povratnom vezom u domenu Laplasove transformacije.

U domenu Laplasove transformacije vrijedi da je:

$$Y_p(s) = G(s)Y(s), \tag{7.230}$$

$$Y_s(s) = X(s) \pm Y_p(s), \tag{7.231}$$

$$Y(s) = H_d(s)Y_s(s), \tag{7.232}$$

na osnovu čega slijedi da je:

$$Y(s) = H_d(s)\left[X(s) \pm G(s)Y(s)\right], \tag{7.233}$$

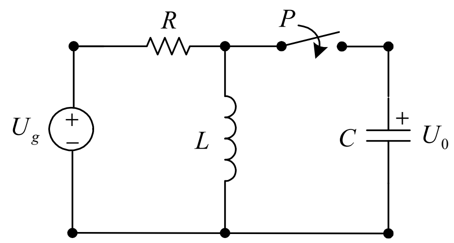
te je funkcija prenosa sistema sa povratnom vezom:

$$H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{H_d(s)}{1 \mp G(s)H_d(s)}. \tag{7.234}$$

Impulsni odziv sistema sa povratnom vezom se može odrediti inverznom Laplasovom transformacijom funkcije prenosa $H(s)$.

Primjer 7.6:

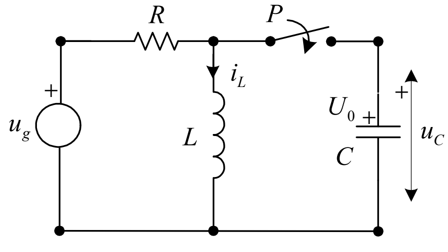
U kolu na Slici 7.21 djeluje generator konstantnog napona $U_g = 5\,\mathrm{V}$. Prekidač P je otvoren i u mreži je uspostavljeno ustaljeno stanje. U trenutku $t = 0$, zatvaranjem prekidača P, u mrežu se uključuje kondenzator sa početnim naponom $U_0 = 2\,\mathrm{V}$. Pomoću Laplasove transformacije odrediti napon na kondenzatoru za $t \geq 0$. Poznate su vrijednosti elemenata kola: $R = 1\Omega$, $L = 1\mathrm{H}$, $C = 1\mathrm{F}$.



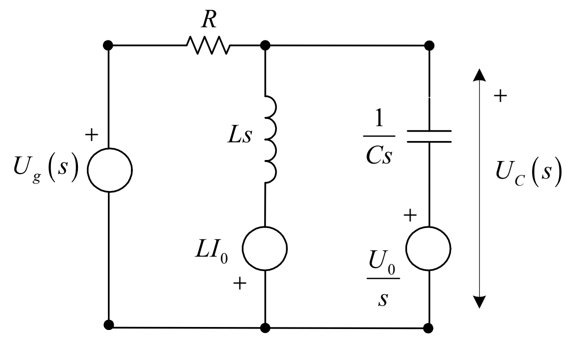
Slika 7.21 RLC kolo.

Rješenje:

Izgled posmatranog kola prije zatvaranja prekidača, za $t < 0$, je dat na Slici 7.22.



Slika 7.22 RLC kolo prije zatvaranja prekidača.



Slika 7.23 RLC kolo poslije zatvaranja prekidača.

U kolu vlada ustaljeno stanje, te je struja kalema:

$$i_L(t) = \frac{u_g(t)}{R} = 5\,\mathrm{A}\,. \tag{7.235}$$

Ovakvo stanje u kolu vlada sve do zatvaranja prekidača, tako da su početni uslovi:

$$i_L(0_-) = I_0 = 5\,\mathrm{A}\,, \tag{7.236}$$

$$u_C(0_-) = U_0 = 2\,\mathrm{V}\,. \tag{7.237}$$

Nakon zatvaranja prekidača u trenutku $t = 0$, za $t \geq 0$ posmatramo kolo na Slici 7.23. Šema kola je data u domenu unilateralne Laplasove transformacije. Akumulisana energija kalema i kondenzatora je prikazana ekvivalentnim generatorima.

Metodom potencijala čvorova dobijamo:

$$\frac{U_C(s) - U_g(s)}{R} + \frac{U_C(s) + LI_0}{Ls} + \frac{U_C(s) - \dfrac{U_0}{s}}{\dfrac{1}{Cs}} = 0\,. \tag{7.238}$$

Unilateralna Laplasova transformacija napona na kondenzatoru je:

$$U_C(s)\left(Cs+\frac{1}{R}+\frac{1}{Ls}\right)=\frac{U_g(s)}{R}+CU_0-\frac{I_0}{s}, \tag{7.239}$$

$$U_C(s)=\frac{s\left(\dfrac{U_g(s)}{RC}+U_0\right)-\dfrac{I_0}{C}}{s^2+\dfrac{1}{RC}s+\dfrac{1}{LC}}. \tag{7.240}$$

Uvrštavajući u (7.240) Laplasovu transformaciju napona naponskog generatora:

$$U_g(s)=\frac{U_g}{s}, \tag{7.241}$$

dobijamo:

$$U_C(s)=\frac{5+2s-5}{s^2+s+1}=2\frac{s}{s^2+s+1}. \tag{7.242}$$

Korijeni polinoma u nazivniku su konjugovano kompleksni i nalaze se u lijevoj poluravni s ravni. Umjesto traženja inverzne Laplasove transformacije pomoću reziduuma, iskoristićemo poznavanje Laplasove transformacije elementarnih signala. U tu svrhu, (7.242) ćemo napisati kao:

$$U_C(s)=2\frac{s}{s^2+s+1}=2\frac{s+\frac{1}{2}-\frac{1}{2}}{\left(s+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}=2\frac{s+\frac{1}{2}}{\left(s+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}-\frac{1}{\left(s+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}. \tag{7.243}$$

Unilateralna Laplasova transformacija signala $\cos(\Omega_0 t)$ i $\sin(\Omega_0 t)$ je jednaka bilateralnoj transformaciji signala $\cos(\Omega_0 t)u(t)$ i $\sin(\Omega_0 t)u(t)$, respektivno. Zbog toga je rezultat koji se dobije inverznom Laplasovom transformacijom:

$$\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+\Omega_0^2}\right\}=\cos(\Omega_0 t)u(t), \tag{7.244}$$

$$\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{\Omega_0}{s^2+\Omega_0^2}\right\}=\sin(\Omega_0 t)u(t), \tag{7.245}$$

pri radu sa unilateralnom Laplasovom transformacijom validan samo za $t \geq 0$. Koristeći pravilo pomaka u domenu kompleksne učestanosti dobijamo napon kondenzatora za $t \geq 0$:

$$u_C(t) = 2e^{-\frac{t}{2}} \cos\frac{\sqrt{3}}{2}t - \frac{2}{\sqrt{3}} e^{-\frac{t}{2}} \sin\frac{\sqrt{3}}{2}t,\ t \geq 0. \tag{7.246}$$

Konačan rezultat nismo pomnožili sa Hevisajdovom funkcijom, jer bismo na taj način pogrešno tvrdili da je napon na kondenzatoru bio jednak nuli za $t < 0$, već smo samo rekli da (7.165) vrijedi za $t \geq 0$.

□